



إعداد :طلاب السنة الثالثة:

1- حسام أمين الدج
2- محمد فرج
3- يحيى حموش
4- هبة الفرا
5– زينب الخضر
6- الهام يوسف
7- نور علي

إشراف الدكتورة :برلنت صبري مطيط

الأشجار TREE

لمحة تاريخية

لقد استخدمت الأشجار أول مرة عام 1847 من قبل الألماني karl georg christian في عمله على الهندسة الأسقاطية

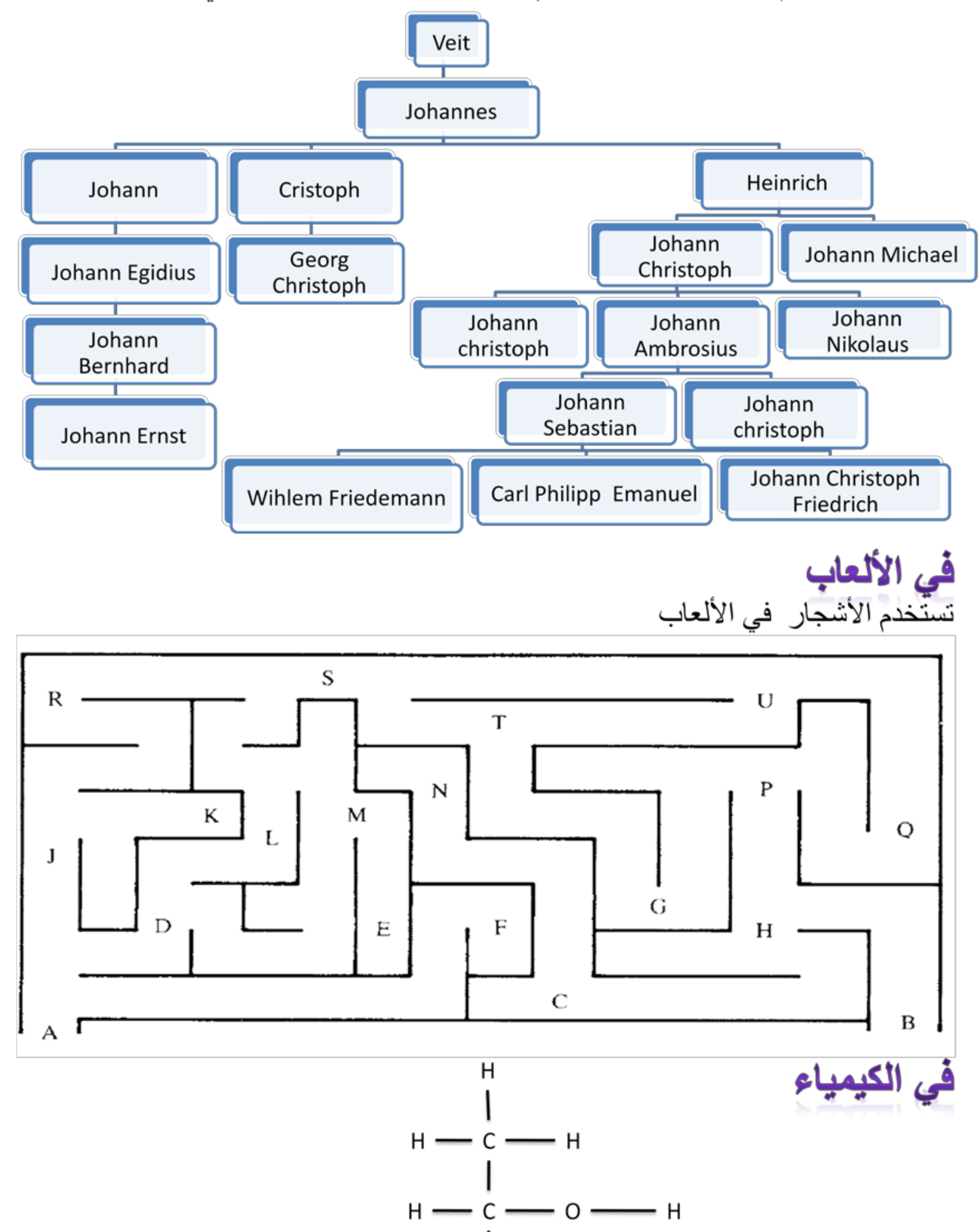
وفي نفس السنة استخدمت من قبل الفيزيائي الألماني Gustav robert kirchhoff في تقريره عن الشبكات الكهربائية

لكن إن أول من استخدم كلمة الشجرة هو العالم Arthur cayley في بحثه الرياضي عن التحويلات التفاضلية

سنتعرف بشكل خاص عن أنواع من العلاقات والتي تكون مفيدة لعدة أنواع من العلوم منها علم الأحياء وعلوم الحاسوب وتطبيقاته والتي غالباً ما تكون موضحة بيانيا وهذه العلاقة والتي هي جوهر أساسي لبناء قواعد البيانات بلغات التصنيف والتي سندعوها الأشجار بحكم مظهرها البياني الذي يوحي بالشجرة التي نراها في الطبيعة

أمثلة

إن من كبار ألمانية كان المؤلف الموسيقي العالمي Johann sebastian Baach والذي كان فخورا بالتراث الموسيقي الطويل لعائلته والتي تعود إلى العام 1500 م لذلك حاول لم شمل سلالة عائلته برسم شجرة عائلية والموضحة كما يلي :



في الألعاب

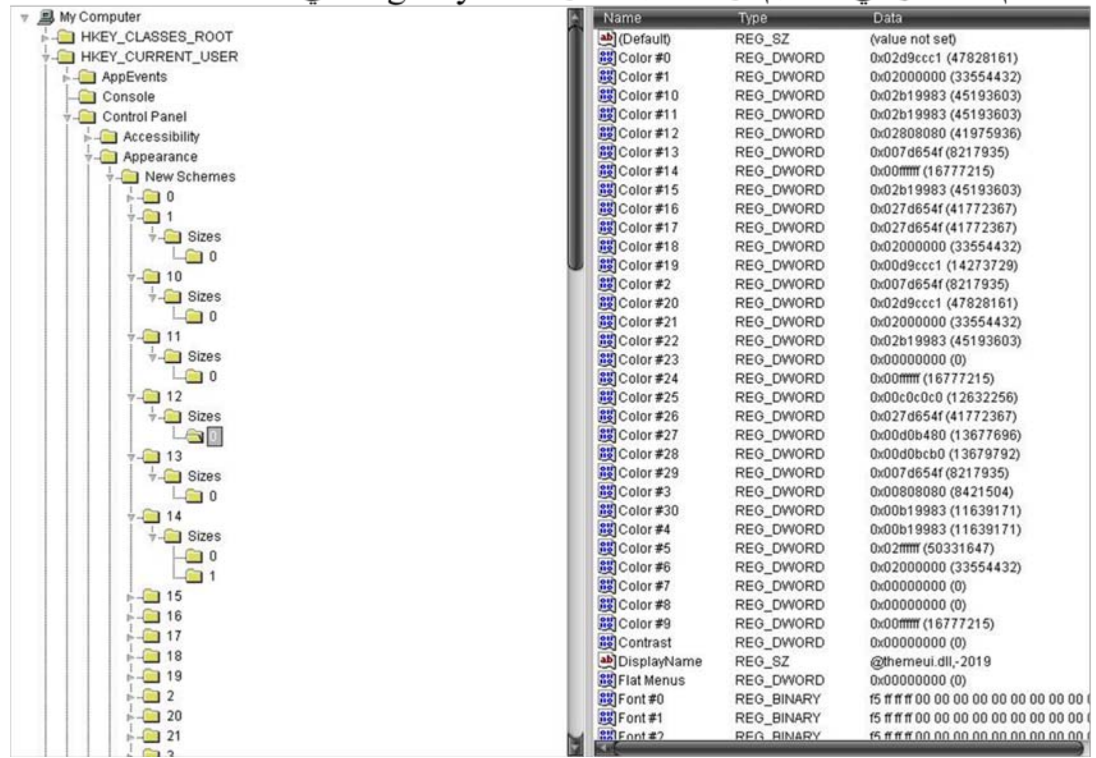
تستخدم الأشجار في الألعاب

في الكيمياء

```
          H
          |
  H  ——  C  ——  H
          |
  H  ——  C  ——  O  ——  H
          |
          H
```

في الحاسوب

تستخدم الأشجار في تصميم قواعد البيانات وكمثال Registry في الحاسب



تعريف -1-

لتكن لدينا المجموعة A ولتكن T علاقة على A نقول عن T أنها شجرة إذا وجدت عقدة (vertex) v_0 من A تحقق :

يوجد طريق وحيد في T من العقدة v_0 إلى إي عقدة أخرى من عناصر A لكن لا يوجد طريق من v_0 إلى v_0

ندعو الرأس (العقدة vertex) v_0 في تعريف الشجرة والتي هي وحيدة بالجذر (root)

ندعو T بالشجرة ذات الجذر v_0 ونرمز لها (T , v_0)

مبرهنة -1-

لتكن لدينا الشجرة (T , v_0) ذات الجذر v_0عندئذ :

1 – لا يوجد دائرة في T

2 – v_0 هي الجذر الوحيد في T

3 – من أجل أي عقدة في T مختلفة عن v_0 لها درجة واحدة داخلة للعقدة و v_0 لا يمتلك أي درجة (درجتها الصفر)

--------(الدرجة الداخلة للعقدة هي عدد الإضلاع الداخلة لها)---------

البرهان

1 - نفرض أنه يوجد دائرة q في T بدايتها ونهايتها العقدة v
من التعريف نعلم أن :
$v \neq v_0$ عندئذ يجب أن يوجد طريق p من v_0 إلى v
$\Leftarrow$ q∘p طريق من v_0 إلى v مختلف عن p
بالتالي تناقض حسب تعريف الشجرة
2 – إذا كان $v_0^\backslash$ جذر آخر للشجرة عندئذ يوجد طريق p من v_0 إلى $v_0^\backslash$
و طريق $p^\backslash$ من $v_0^\backslash$ إلى v_0

$\Leftarrow$ q∘p دائرة من v_0 إلى v_0 وهذا مستحيل
إذا العقدة v_0 جذر وحيد
3 – ليكن w_1عقدة مختلفة عن v_0 في T عندئذ حسب التعريف :
يوجد طريق وحيد $v_0 , v_1 ,\ldots, v_k ,w_1$ من العقدة v_0 إلى العقدة w_1 في T

$\Leftarrow$ $(v_k , w_1) \epsilon T$

وهذا يعني أن w_1 تمتلك درجة داخلة واحدة على الأقل
لو كانت w_1 تمتلك أكثر من درجة واحدة عندئذ يوجد عقدتان w_3 , w_2
في T تحقق :

$$(w_3 , w_1), (w_2 , w_1) \epsilon T$$

إذا كانت $w_2 \neq v_0$ و $w_3 \neq v_0$ عندئذ حسب التعريف:
يوجد طريقان وحيدان p_2 من v_0 إلى w_2
p_2 من v_0 إلى w_3

$\Leftarrow$ $(w_3 ,w_1)∘p_3 \quad \wedge \quad (w_2 ,w_1)∘p_2$
طريقان مختلفان من v_0 إلى w_1
وهذا يناقض تعريف الشجرة والتي جذرها v_0
إذا w_1 يمتلك درجة واحدة
بقي أن نبرهن أن v_0 لا يمتلك أي درجة

التمثيل التخطيطي للشجرة

نرسم مخطط الشجرة وفق القواعد التالية :

1 – نرسم الجذر v_0

2 – لا يوجد أضلاع داخلة إلى v_0 لكن يمكن أن يخرج منها

3- نرسم هذه الأضلاع بحيث تكون متجهة نحو الأسفل

تعريف -2-

عقد النهاية للأضلاع التي بدايتها v_0 نسميها عقد المستوى الأول Level 1
بينما v_0 يكون في المستوى صفر Level 0

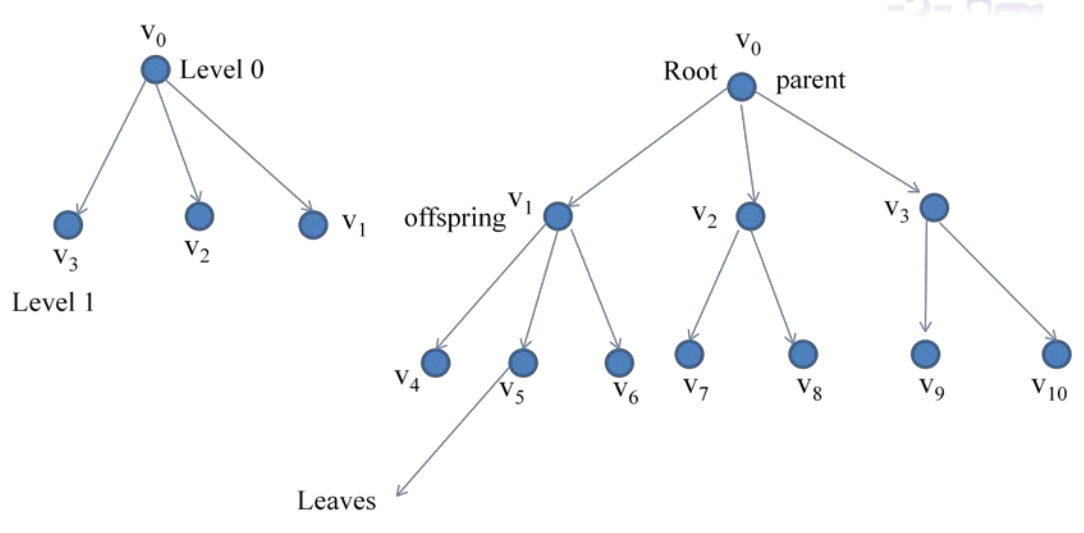
تعريف -3-

عقد النهاية للأضلاع التي بدايتها v_0 نسميها أحيانا الذرية offspring
بينما v_0 نسميها بالمصدر (الأب)parent كما أن كل عقدة من الذرية تدعى بالأخ siblings

تعريف -4-

نسمي عقد الشجرة Tوالتي لا تمتلك إي ذرية بالأوراق Leaves أو أوراق الشجرة T
الأوراق دائما درجتها الداخلة هي الواحد

مثال -3-



ملاحظات :

1- يمكن للشجرة أن تمتلك عدد لا نهائي من المستويات و أي مستوى يمكن أن يحتوي على عدد لا نهائي من العقد باستثناء المستوى صفر

2- سنفترض أن جميع الأشجار تملك عدد منته من العقد

3- سنفرض أن الذرية لأي عقدة من الشجرة تكون مرتبة خطيا مما يعني أنه لو فرضنا أن العقدة تملك أربع ذريات فإننا نفرض أنها مرتبة وبالتالي نرمز للترتيب ب الأول والثاني والثالث والرابع

4- عندما نرسم مخطط للشجرة فإننا سنفترض ترتيبا ما للذريات من اليسار إلى اليمين وعندئذ نسمي هذه الشجرة بالشجرة المرتبة أو المنتظمة (Orderd tree)

مبرهنة -2-

لتكن لدينا الشجرة (T , v_0) على المجموعة A عندئذ :

1 – Tعلاقة غير انعكاسية

2 – T علاقة غير تناظرية

3 – إذا كان $(a,b)\in T \wedge (b,c)\in T$ عندئذ $(a,c)\notin T$ من أجل أي عقدة

مثال -4-

لتكن A مجموعة تشمل امرأة ما معطية v_0 وكل أحفادها نساء

نعرف العلاقة التالية T على المجموعة A إذا كان v_1 ,v_2 عناصر من Aعندئذ

$v_1 T v_2 \Leftrightarrow v_1$ أم ل v_2

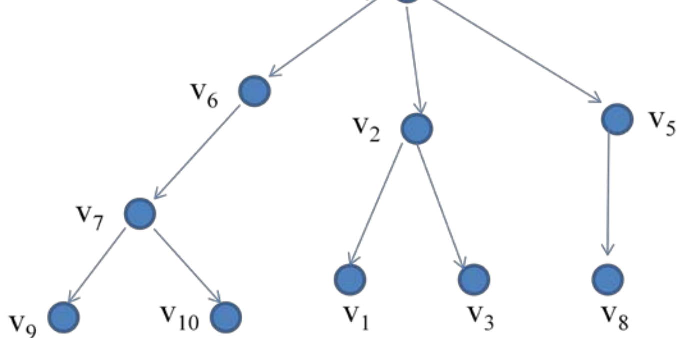
وعندئذ تكون العلاقة T شجرة و v_0 جذرها

مثال -5-

لتكن $A = \{v_1, v_2 ,\ldots\ldots, v_{10}\}$

ولتكن $T= \{ (v_2, v_3),(v_2, v_1), (v_4, v_5),(v_4, v_6),(v_5, v_8), (v_6, v_7), (v_4, v_2),(v_7, v_9),(v_7, v_{10})\}$

إن العلاقة T شجرة وجذرها v_4 وبيانها



تعريف -5-

إذا كان n عدد صحيح موجب نقول عن الشجرة أنها غير منتهية n-tree إذا كانت كل عقدة تملك على الأكثر n ذرية offspring من أجل كل عقدة في T مختلفة عن الأوراق

تعريف -6-

إذا كان n عدد صحيح موجب نقول عن الشجرة أنها تامة complete n-tree إذا كانت كل عقدة تملك بالضبط n ذرية offspring من أجل كل عقدة في T مختلفة عن الأوراق

في حالة خاصة 2-tree تدعى بالشجرة الثنائية التامة أو الشجرة الثنائية binary tree

تعريف -7-

لتكن (T , v_0) شجرة ذات الجذر على المجموعة A وليكن vعقدة في الشجرة T ولتكن B مجموعة تضم جميع عقد الجيل الثالث والتي يمكن أن تكون موصولة بطريق بدايته العقدة v ولنفرض أن $B \subseteq A$ وليكن T(v) مقصور T على B والتي تعني $T(v)=T\cap(B*B)$

عندئذ: T(v)شجرة جزئية ذات الجذر v

مبرهنة -3-

إذا كانت (T , v_0) شجرة و $v \in T$ عندئذ T(v) شجرة جذرها v

ونقول عن T(v) أنها شجرة جزئية subtree بدايتها v

البرهان

من التعريف T(v) نرى أنه هناك طريق من v إلى أي عقدة أخرى في T(v) و إذا كانت w عقدة في T(v) تحقق أنه يوجد طريقان مختلفان q و $q^\backslash$ من v إلى w

وإذا كان p طريق في T من v_0 إلى v عندئذ :

$q\circ p$ و $q^\backslash\circ p$ طريقان مختلفان من v_0 إلى w وهذا مستحيل

و بما أن T شجرة جذرها v_0

⟸ كل طريق من v إلى أي عقدة w في T(v) يجب أن تكون وحيدة

أيضا q دائرة في T(v)

⟸ q دائرة في T

وهذا يناقض المبرهنة الأولى

⟸ q لا يمكن أن يكون موجودا بالتالي T(v) شجرة جذرها v

الأشجار ذات الأدلة Labeled tree

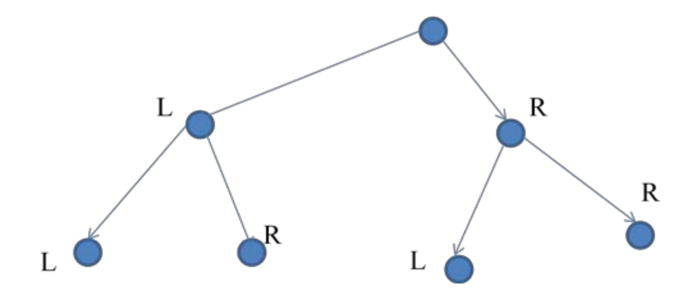
في بعض الأحيان من المفيد أن نضع دليل على كل عقد في مخطط بياني ما والذي يستخدم لهدف ما أو لغاية محدودة في العديد من المجالات ولاسيما علم الحاسوب وعلم الأحياء

تعريف -8-

إن المخططات ذات الأدلة تدعى بالمخططات الموضعية (positional)

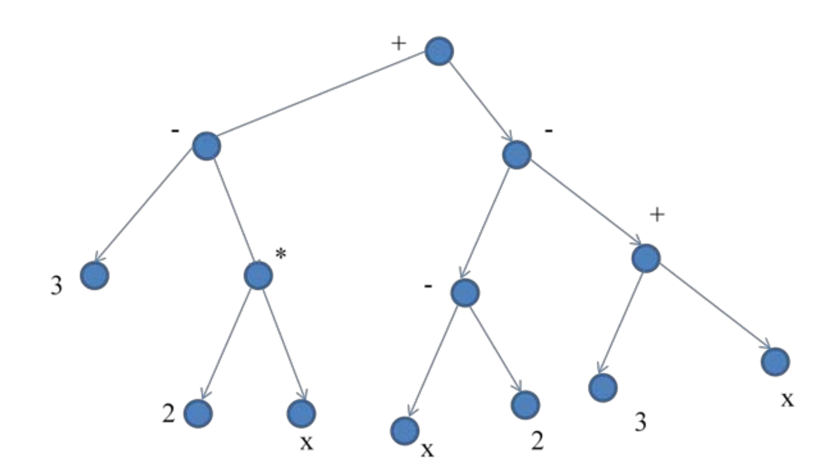
ملاحظة :

الشجرة الموضعية هي الشجرة المرتبة (المنتظمة)
عند رسم المخططات للشجرة الموضعية سنتصور من أجل كل عقدة مرتبة بشكل متماثل عند المواضع اليسارية واليمينية



مثال -6-

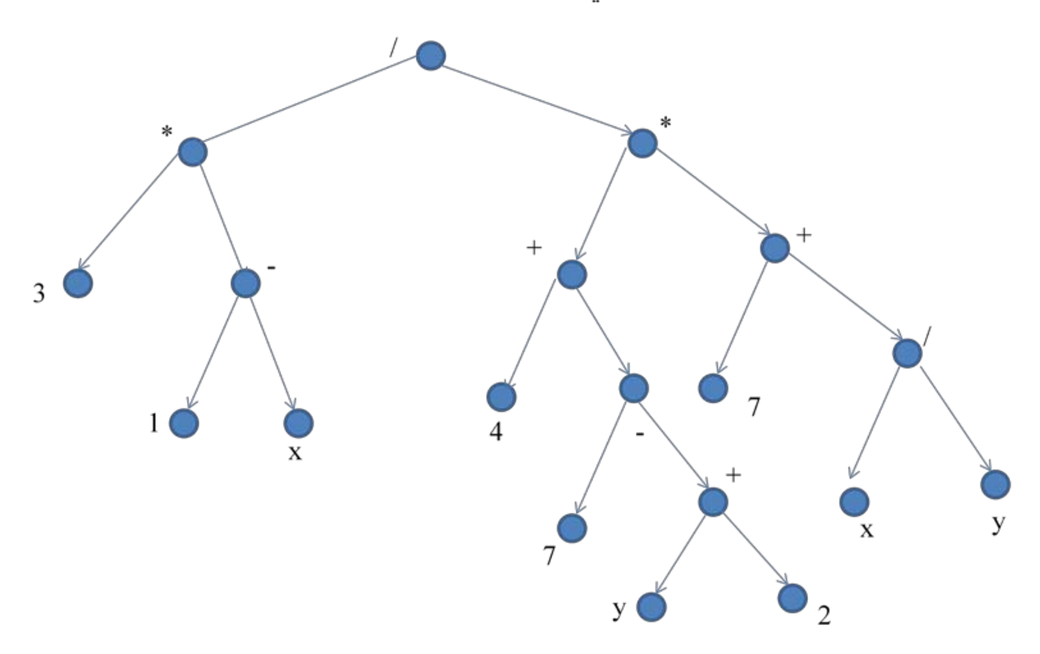
ليكن لدينا العبارة الجبرية ((x+3)-(x-2)) +((3 – (2 *x
سنفترض أنه لا يوجد عمليات مثل - , + , * , / يمكن إنجازها ما لم نعرف العنصرين المشكلين وفق عملية الجمع دون معرفة قيمة ((x*2)-3) و ((x+3)-(x-2))
وأيضا لا نستطيع حساب عملية الطرح ((x+3)- (x-2)) دون معرفة قيمة (x+3) :(x-2)
إن التمثيل التخطيطي مهم لمثل هذه التعابير والذي هو عبارة عن شجرة ثنائية ذات الأدلة



مثال -7-

ليكن لدينا التعبير (3 *(1-x)) / ((4 + (7 – (y+2))) * (7 +(x /y)))

عندئذ الشجرة الموافقة للتعبير السابق هي



ملاحظات

إن الشجرة الموضعية الثنائية هامة في هذه القضية حيث أن الأدلة في تعتبر في أغلب الأحيان مصنفة يساريا ويمينيا بدلا من 1 و2 حيث نرمز للتصنيف اليساري ب L ونرمز للتصنيف اليميني ب R

كما أن الأشجار ذات الأدلة يمكن أن نصنف بها بعض المجموعات

الشجرة الثنائية الموضعية في بناء البيانات

تعريف-1-

إن وحدة خزن المعلومات المثالية والتي ندعوها بالخلية تحتوي على مادتين

الأولى : البيانات المصنفة Data

الثانية : مؤشر للخلية التالية pointer

والعنوان حيث الخلية التي حدد مكانها كما أن مجموعة الخلايا الموصولة ببعضها وفق المؤشرات ندعوها برابط القائمة Linked list الممثلة بيانيا والمزودة بأدوات تستعمل الصف array

تعريف -2-

رابط القائمة المضاعفة Doubly linked list التي فيها كل خلية تحتوي على مؤشرين ونوع من البيانات

التمثيل البياني للشجرة ذات الرابطة القائمة المضاعفة

نستخدم الرمز للدلالة على خلية جديدة في منتصفها نزودها بالوحدة المخزنة بيانيا ومؤشرين مؤشر يساري Left pointer ومؤشر يميني Right pointer ممثلين بالنقاط والأسهم كما نستعمل الرمز للدلالة على المؤشر المطابق أو عدم وجود بيانات إضافية ويكون عندئذ البيان هو:

1 – كل خلية توافق عقدة

2 – جزء البيان والذي يمكن أن يحتوي رمز للعقدة أو مؤشر يدل على هذا الرمز

3 – المؤشرات اليمينية واليسارية ستخصص ليسار ويمين عقد الذرية

4 – إذا كان أحد هذه الذريات غير موجودة فإن المؤشر الموافق سيكون

5 – ننفذ هذه الخطوات باستخدام ثلاثة أسهم :

1 – الأيسر ويحمل المؤشرات التي تدل على الذرية اليسرى Left offspring

2 – الأيمن ويحمل المؤشرات التي تدل على الذرية اليمنى Right offspring

3- البيانات وتحتوي على المعلومات أو المؤشرات الدالة على هذه المعلومات Data

6- القيمة (0) تستخدم كمؤشر يدل على الذرية الموافقة الغير موجودة

7 – نضيف عادة إلى رابط القائمة المضاعفة و إلى الأسهم خانة البداية والتي تشير إلى جذر الشجرة

مثال -8-

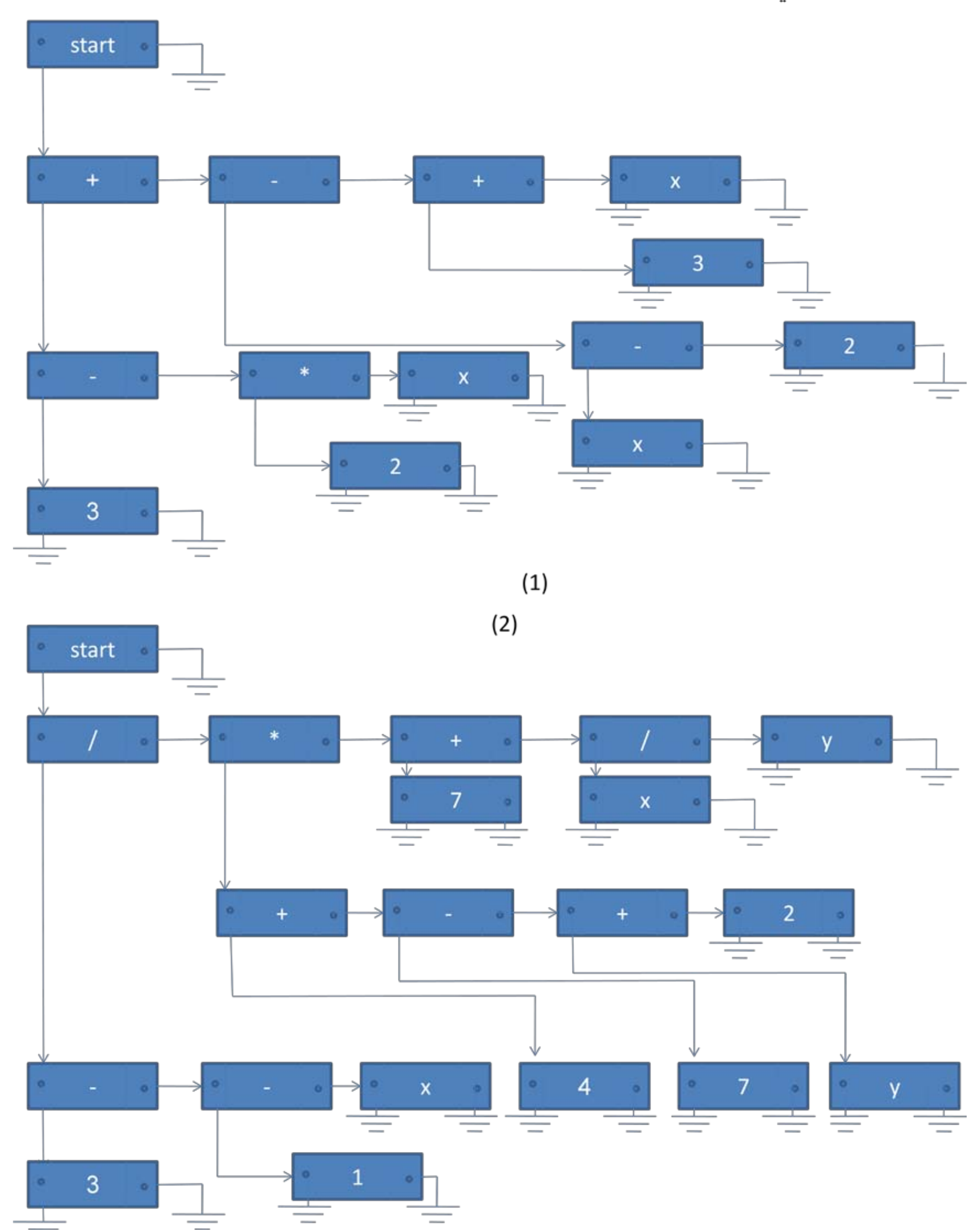
(1)

N	Left	Data	Right
1	2	~~X~~	0
2	3	+	8
3	4	-	5
4	0	3	0
5	6	*	7
6	0	2	0
7	0	x	0
8	9	-	12
9	10	-	11
10	0	x	0
11	0	2	0
12	13	+	14
13	0	3	0
14	0	x	0

(2)

1	7	~~X~~	0
2	0	3	0
3	2	*	5
4	0	1	0
5	4	-	6
6	0	x	0
7	3	/	15
8	0	4	0
9	8	+	11
10	0	7	0
11	10	-	13
12	0	y	0
13	12	+	14
14	0	2	0
15	9	*	17
16	0	7	0
17	16	+	19
18	0	x	0
19	18	/	20
20	0	y	0

إن تمثيل الشجرة الموضعية الثنائية تكون وفقا للصفوف البيانات و
المؤشرات هي



تشفير هوفمان Huffman code tree

إن تشفير هوفمان من أجل الرسائل المكتوبة بأحرف إنكليزية يستخدم أشرطة من الواحدات و الأصفار تماما كما هو الحال في الآسكي ASCII code ذات الطول 7 إلا أن تشفير هوفمان يستخدم الأشرطة ذات الطول المتغير وبالتالي فإن الرسائل المكتوبة بشيفرة ASCII يكون طولها أكبر فيما لو كتبناها بشيفرة هوفمان

إن الشريط الخاص بحرف معين سوف يعطينا طريقا من جذر الشجرة إلى الورقة التي تحمل رمز ذلك الحرف أو بمعنى آخر المرمزة وفق ذلك الحرف

إن الصفر (0) يدل على أنه يجب التوجه إلى اليسار

إن الواحد (1) يدل على أنه يجب التوجه إلى اليمين

حتى نشفر رسالة وفق هوفمان علما أن شجرة هوفمان معطاة نتبع مايلي :

1 – نتبع الطريق المشار إليه عندما نصل إلى الورقة نسجل الدليل الموضوعة عليه

2 – نعود إلى الجذر ونكمل وفق الشريط

مثال -9-

استخدم تشفير هوفمان الشجري لترجمة الشريط 0101100 المعطى وفق الشجرة

الحل :

1 - نبدأ بالجذر ونتجه نحو اليسار مستخدمين الصفر فنجد إن الورقة التي وصلنا إليها تحمل الدليل E

2- نعود إلى الجذر ونستخدم الشريط 101100وبالتالي نتجه إلى اليمين ثم لليسار فتكون الورقة التي نبحث عنها هي A

نكرر العملية مع الشريط 1100 فيكون الحرف S

100 فيكون الحرف E

عندئذ الشريط 0101100 يمثل EASE

ملاحظة

إن أحد مساوئ شيفرة هوفمان هو احتمال حدوث أخطاء أثناء عملية النقل

فمثلا إذا كان الخطأ أثناء النقل كأن يعطى الشريط 0101110 بدلا من 0101100 بالتالي الكلمة سوف تقرأ EAR بدلاً من EASE

شجرة البحث tree searching

يوجد العديد من الأحداث يكون من المفيد اعتبار أن كل عقدة في الشجرة بالضبط في ترتيب معين , ككل عقدة متتالية متلاقية .
إن عملية **زيارة** **visiting** كل عقدة من الشجرة في ترتيب معين ندعوه إيجاد أشجار البحث أو التعبير عن الشجرة .

ملاحظات

1- سنخص في دراستنا الحالية الأشجار الثنائية الموضعية positional , كما سنشير إلى الذرية اليساري لكل عقدة v من T بالرمز $\mathbf{v_L}$ أما الذرية اليمينية نرمز له بالرمز $\mathbf{v_R}$.

2- لتكن لدينا T شجرة ثنائية موضعية جذرها v , عندئذ في حال وجود v_L نسمي $T(v_L)$ بالشجرة الجزئية اليسارية ل T .
وندعو في حال وجود v_R أن $T(v_R)$ بالشجرة الجزئية اليمينية ل T

إن كلاً من $T(v_L)$, $T(v_R)$ في حال وجودهما ستكونان أشجار ثنائية موضعية ذات الجذر v_L , v_R على الترتيب .

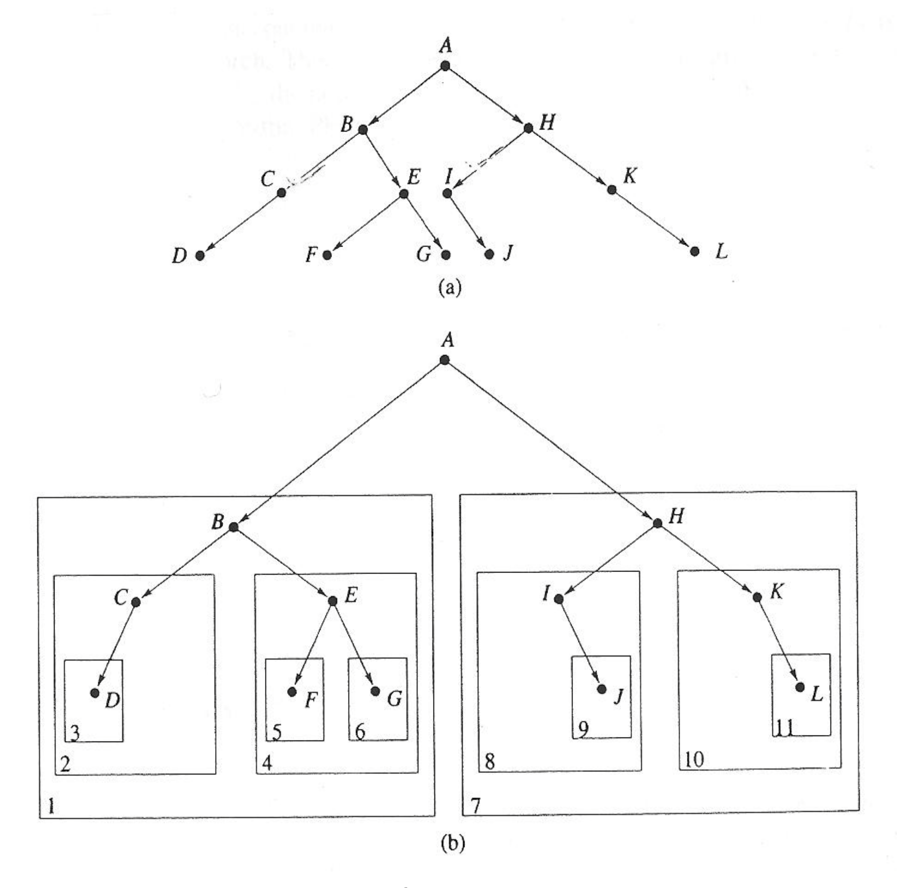
خوارزمية preoder لبحث الأشجار

الخطوة الأولى : زيارة v .
الخطوة الثانية : إذا كانت v_L موجودة , عندئذ نطبق الخوارزمية على $(T(v_L), v_L)$.
الخطوة الثالثة : إذا كانت v_R موجودة , عندئذ نطبق الخوارزمية على $(T(v_R), v_R)$.
ويمكن القول أن بحث preorder يتضمن ثلاث خطوات :
1 - زيارة الجذر .
2 - نبحث الشجرة اليسارية في حال وجودها .
3 - نبحث الشجرة اليمينية في حال وجودها

مثال -1-

لتكن لدينا T شجرة موضعية ثنائية ذات الأدلة
الجذر لهذه الشجرة هو العقدة ذات الدليل A , ولنفرض أن زيارة أي عقدة $v \in T$ يعطي دليل (labeled) هذا العقدة .

لنطبق الآن بحث preorder مع ملاحظة أنه في حال أن الشجرة تحوي عقدة واحدة لها عندئذ تكون نتيجة بحث هذه الشجرة هي دليل هذا االعقدة (والذي هو جذر الشجرة)
ويمكن تسهيل العمل من خلال رسم صناديق حول الأشجار الجزئية وترقيم الصناديق كما يلي :



ووفقاً ل preorder وبتطبيقها على T سوف نقوم أولاً بزيارة الجذر ل T ونكتب A ثم نبحث في الشجرة الجزئية (1) , ثم في الشجرة الجزئية (7) .
لتطبيق preorder على الشجرة الجزئية (1) نقوم بزيارة الجذر في الشجرة الجزئية (1) ونكتب B , ثم نقوم ببحث في الشجرة الجزئية (2) ثم نبحث في الشجرة الجزئية (4) .

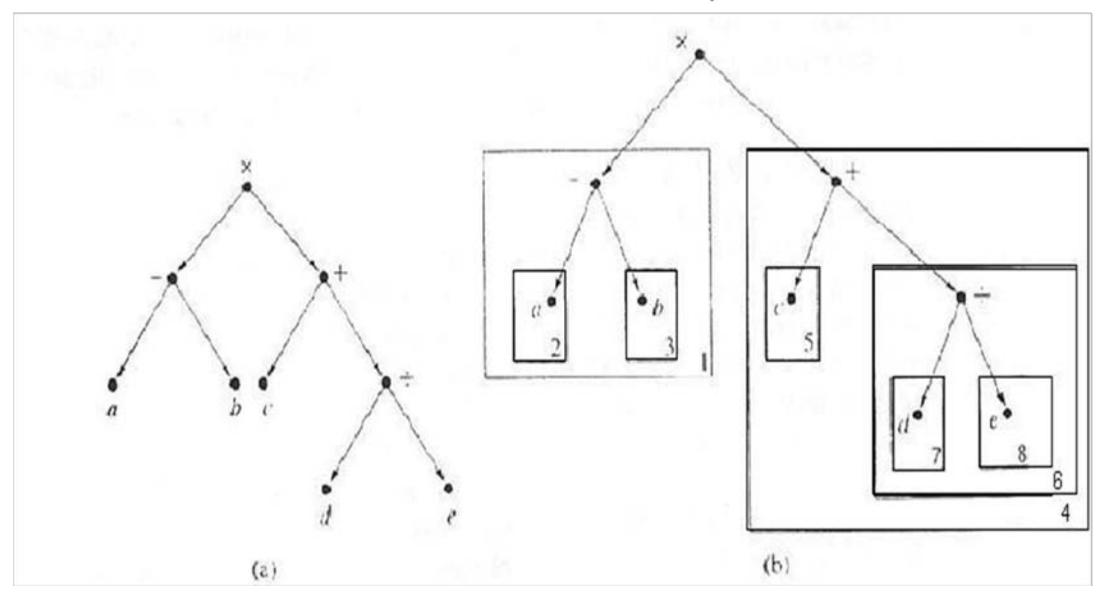
حيث أن البحث في الشجرة الجزئية (2) يعطينا بداية الرمز C ثم D(بسبب بحث في الشجرة الجزئية (3)) وبالتالي لدينا النتيجة المبدئية : ABCD .
نلاحظ أنه... لا يمكن إنهاء بحث الشجرة الجزئية (7) حتى نطبق خوارزمية البحث على الشجرة الجزئية (2) و (4) ولا يمكننا إنهاء بحث في الشجرة الجزئية (2) حتى نبحث في الشجرة الجزئية (3) و هكذا...
ولإكمال الحل علينا الآن بحث في الشجرة الجزئية (4) وبالتالي علينا بحث في الشجرة الجزئية (5) و (6) على الترتيب وبالتالي ينتج لدينا F و G .
ونطبق نفس الخوارزمية على (7) وهذا سيعطي السلسلة H I J K L وتكون سلسلة البحث النهائية ل T هي A B C D E F G H I J K L .

مثال -2-

لتكن لدينا العبارة الجبرية التالية : $(a-b)\times(c+(d\div e))$

ولدينا مخطط الشجرة الثنائية الموضعية الموصفة الممثلة للعبارة , وستكون السلسلة الناتجة عن تطبيق خوارزمية preorder على الشكل التالي :

وهو ما يسمى الترميز البولندي للعبارة الجبرية المعطاة × – a b +c ÷ de



خوارزمية postorder

الخطوة الأولى : نبحث في الشجرة الجزئية اليسارية $(T(v_L),v_L)$ في حال وجودها .

الخطوة الثانية : زيارة الجذر v

الخطوة الثالثة : نبحث في الشجرة الجزئية اليمينية $(T(v_R),v_R)$ في حال وجودها

مثال -3-

لتكن لدينا شجرة المثال (1) ولنطبق عليها خوارزمية Inorder :

في البداية علينا أن نبحث في الشجرة الجزئية (1) , وبالتالي نحن بحاجة إلى بحث في الشجرة الجزئية (2) وهذا يقودنا إلى البدء ببحث في الشجرة الجزئية (3) ذات العقدة الواحدة وبالتالي يكون D هو الحرف المكتوب أولاً , وبحث في الشجرة الجزئية (2) يستمر بكتابة C ثم نقوم بزيارة جذر الشجرة (1) ونكتب B

ثم نواصل بحث في الشجرة الجزئية (4) الذي ينتج G , E , F على الترتيب .

ثم نقوم بزيارة الجذر للشجرة T ونكتب A ثم نواصل بحث في الشجرة الجزئية (7) وبالتالي ينتج لدينا : I J H K L .

وتكون نتيجة البحث الأخير هي D C B F G A I J H K L

أمـــــا باستخدام خوارزمية POSTORDER :

فإن كلاً من الشجرتين 1 و 7 يجب أن نقوم ببحثهما قبل كتابة A , وكذلك الشجرتين 2 و 4 يجب أن نقوم ببحثهما قبل كتابة B وهكذا .
بحث الشجرة الجزئية 2 يتطلب بحث الشجرة الجزئية 3 , ويكون D أول حرف مطبوع ويتواصل بحث الشجرة الجزئية 2 بكتابة C , وببحث الشجرة الجزئية 4
ينتج لدينا : E , G , F
ثم نقوم بزيارة جذر الشجرة 1 ونطبع B ونكمل ببحث الشجرة الجزئية 7 ونطبع الرموز :
H , K , L , I , J
وفي النهاية نقوم بزيارة الجذر للشجرة T ونطبع A
وبالتالي نتج لدينا السلسلة التالية : D C F G E B J I L K H A .

مثال -4-

لنطبق الخوارزميتان Postorder , Inorder لبحث العبارة الجبرية في المثال (2) :
تطبيق Inorder يعطينا السلسلة $a - b \times c + d \div e$
وهي العبارة نفسها التي بدأنا بها المثال (2) **مع إزالة الأقواس** , وهذا عادةً ما يدعى الترميز **infix** وهذا ما يفسر التسمية Inorder .

العبارة السابقة غير واضحة دون أقواس لأنه يمكن فهمها على الشكل الآتي :
a-(b x ((c+d) ÷ e)) وهذا ينتج عنه شجرة مختلفة .وبالتالي لا يمكن استعادة الشجرة عند استعمال Inorder .ولكن يمكن استعادة الشجرة من خلال الترميز البولندي في حال استخدام Preorder ولهذا السبب فإن الترميز البولندي هو الأفضل من أجل استخدامات الحاسب و على الرغم من أن الترميز infix هو المألوف أكثر .
الحل حسب Postorder :
سيكون لدينا السلسلة : ab - c d e ÷ + x , وأسلوب التعامل مع الترميز البولندي العكسي هو بنفس طريقة الترميز البولندي المباشر مع الاختلاف في أن الرمز يكون بعد الطرفين وليس قبلها , وباستخدام القيم : a=2 , b=1 , c=3 , d=4 , e=2 لنحسب قيمة العبارة السابقة :

1) 21 -342 ÷ + x
2) 1 3 4 2 ÷ + x   استبدال -21 بِ 2-1
3) 1 3 2 + x   استبدال ÷42 بِ 2=4÷2
4) 15 x   استبدال + 32 بِ 5=2+3
5) 5   استبدال x 15 بِ 5=1 x 5

ملاحظة

من أجل حساب قيمة عبارة رياضية عن طريق الترميز البولندي نتبع ما يلي :
نتحرك من اليسار إلى اليمين , وبفرض لدينا السلسلة F x y حيث F رمز للعمليات الثنائية "ذات الطرفين" (... , ÷ , - , +) وحيث x , y أرقام .
لنحسب x F y ونضع النتيجة بدل السلسلة F x y ونستمر بهذا الشكل حتى نصل إلى رقم واحد

وكمثال على ذلك : نعوض القيم التالية في العبارة السابقة
a=6 , b=4 , d=2 , e=2 ,c =5 ولحساب العبارة 22 ÷ 5 + 64 - × نقوم بما يلي :

1- 22 ÷ 5 + 2 × نستبدل 64- بِ 2=6-4.
2 - 22 ÷ 51+ 2 × نستبدل 22÷ بِ 2÷2 أو 1
3- 26 × نستبدل 51+ بِ 6=5+1
4- 12 نستبدل 26 × بِ 6 × 2

خوارزمية Inorder

لبحث الأشجار الموضعية ذات الجذر v :
الخطوة الأولى : نبحث الشجرة الجزئية اليسارية $(T(v_L),v_L)$ في حال وجودها .
الخطوة الثانية : زيارة الجذر v .
الخطوة الثالثة : نبحث الشجرة الجزئية اليمينية $(T(v_R),v_R)$ في حال وجودها

بحث الشجرات بشكل عام

كما رأينا من قبل فإن كل شجرة مرتبة يمكن أن تمثل بشكل شجرة ثنائية موضعية حتى لو اختلف هذا التمثيل عن T , ومن خلال هذا التمثيل يمكن استخدام النظريات السابقة .
لتكن لدينا T شجرة مرتبة ولتكن A هي مجموعة العقد , ولنعرف الشجرة الثنائية الموضعية B(T) على A بالشكل التالي :
من أجل $v \in A$ فإن v_L في B(T) هي الذرية الأولى ل v في T (وفق الترتيب المعطى) وفي حال وجودها و v_r في B(T) هو الترتيب التالي ل v في T في حال وجودها .
لتكن لدينا الشجرة الآتية , ولنفرض أن الذرية كل عقدة مرتبة من اليسار إلى اليمين بحسب اسمها :

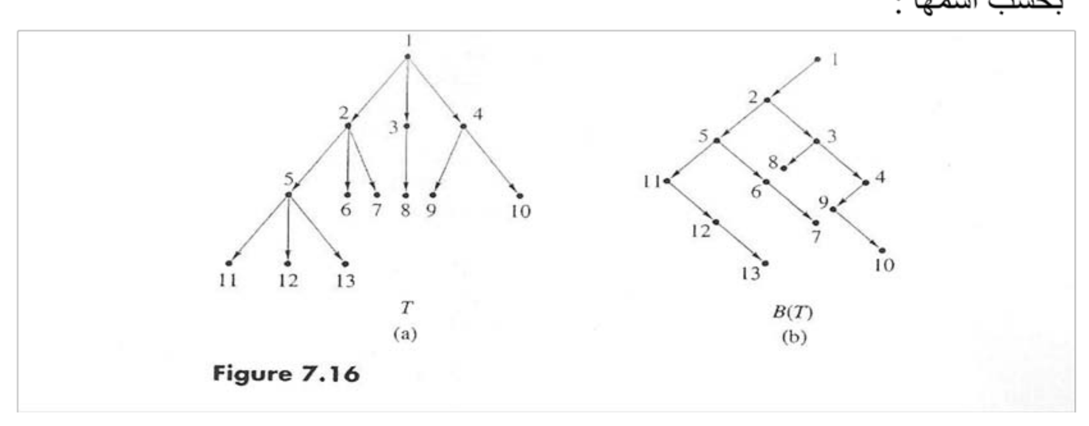


Figure 7.16

ملاحظة

يسمى التمثيل ذو القائمة المضاعف ل B(T) بالتمثيل المترابط ذو القائمة ل T

مثال -5-

لدينا مخطط الشجرة ذات الأدلة مع ذرية مرتبة من اليسار إلى اليمين

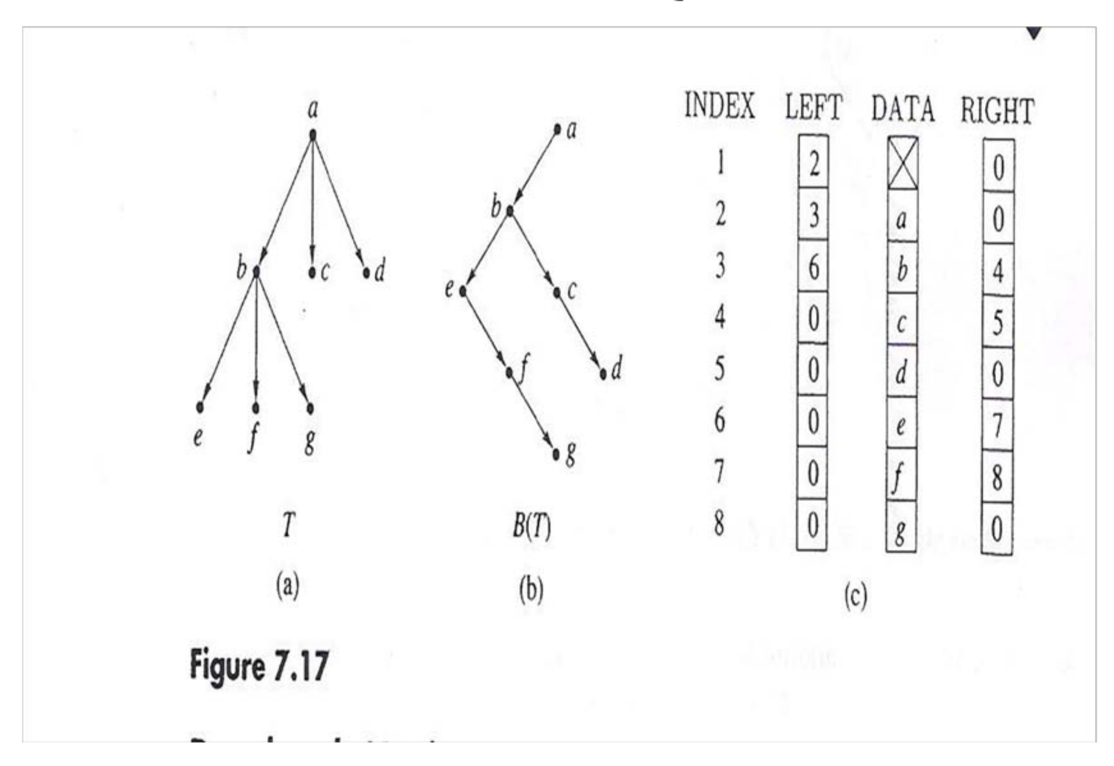


Figure 7.17

Pseudo code version

سنفترض في هذه الخوارزمية أنه قد تم تعريف البرنامج الفرعي للزيارة

Subroutine Preorder (T , v):

```
1. CALL VISIT (v)
2. IF (v_L exists) THEN
     a. CALL PREORDER(T(v_L), v_L)
3. IF (v_R exists) THEN
     a. CALL PREORDER(T(v_R), v_R)
4. RETURN
END OF SUBROUTINE PREORDER
```

```
SUBROUTINE INORDER(T, v)
1. IF (v_L exists) THEN
     a. CALL INORDER(T(v_L), v_L)
2. CALL VISIT(v)
3. IF (v_R exists) THEN
     a. CALL INORDER(T(v_R), v_R)
4. RETURN
END OF SUBROUTINE INORDER
```

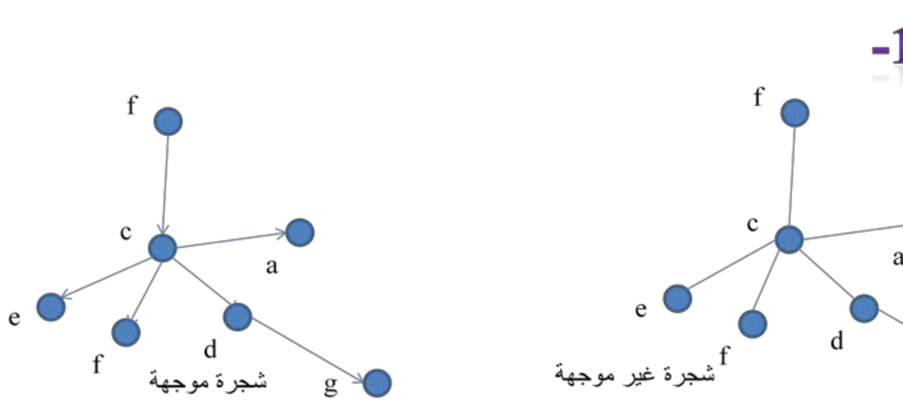
```
SUBROUTINE POSTORDER(T, v)
1. IF (v_L exists) THEN
     a. CALL POSTORDER(T(v_L), v_L)
2. IF (v_R exists) THEN
     a. CALL POSTORDER(T(v_R), v_R)
3. CALL VISIT(v)
4. RETURN
END OF SUBROUTINE POSTORDER
```

الأشجار غير الموجهة undirected tree

تعريف-1-

هي الإغلاق المتناظر للشجرة أو هي العلاقة الناتجة بجعل كل الأضلاع ثنائية الاتجاه
وفي الرسم البياني للشجرة غير الموجهة T نضع خط وحيد بدون سهم يصل العقدة a و b
وفق $(a,b)\wedge(b,a)\in T$ وعندئذ إذا كان لدينا المجموعة A={a,b}
نسمي العقد a و b بالعقد المتجاورة
أما المجموعة {a,b} تدعى بالأضلاع غير الموجهة وفق الشجرة T عندما $(a,b)\wedge(b,a)\in T$
وبالتالي كل غير موجه يقابل ضلعين عاديين (a ,b) و (b ,a) موجهين

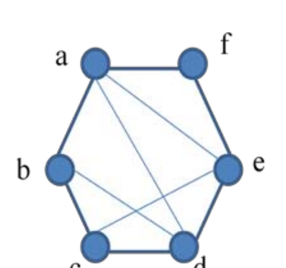
مثال -1-



تعريف-2-

لتكن R علاقة تناظرية (متماثلة) ولتكن $p: v_0 , v_1 ,..., v_k$ طريق في R
نقول عن الطريق P انه بسيط إذا لم يوجد ضلعان موافقان لنفس الضلع الغير موجه
وإذا كانت $v_1=v_n$ سندعو p دائرة بسيطة

مثال -2-



أن الشكل يبين مخطط للعلاقة المتناظرة R وفق الرسم البياني
أن الطريق a , b, c, e ,d بسيط أما الطريق f ,e, d, c ,d ,a غير بسيط لأن الضلعين (c ,d) و (d ,c) موافقان لنفس الضلع الغير موجه {c , d }
وأيضا f , a, b, d, a ,e ,f دائرة بسيطة وأيضا الدائرة d, a, b, d دائرة بسيطة
أما الدائرة f, e, d, c,e,f ليست دائرة بسيطة لأن (e,f) و (f ,e) موافقان لنفس الضلع الغير موجه { f ,e }

تعريف-3-

نقول عن العلاقة R المتناظرة أنها غير دائرية إذا لم تحوي دائرة بسيطة

تعريف-4-

نقول عن العلاقة R أنها مترابطة إذا وجد طريق في R من أي عقدة إلى أي عقد أخرى

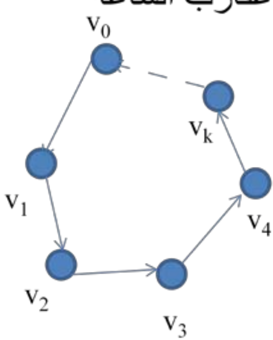
مبرهنة -1-

لتكن R علاقة تناظرية على A عندئذ العبارات التالية متكافئة :
1- R شجرة غير وجهة
2- R مترابطة وغير دائرية

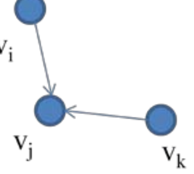
البرهان:

لنفرض أن R شجرة غير موجهة هذا يعني أن R مغلقة تناظريا على الشجرة T في A
إي أنه إذا كان $(a,b)\in R$ فإن $(a,b)\in T \vee (b,a)\in T$
هندسيا :
هذا يعني أن كل ضلع غير موجه في مخطط R يظهر في مخطط T باتجاه موجه بشكل آخر
نفرض أن R تملك دائرة بسيطة $p: v_0 , v_1 ,..., v_k , v_0$

عندئذ من أجل أي ضلع (v_i , v_j) نختار زوج (v_i , v_j) أو (v_j , v_i) في T
ينتج شكل مغلق ضلعه من T حيث كل ضلع يشير إلى اتجاه ما ويكون عندئذ لدينا ثلاث حالات إما كل الأسهم عكس عقارب الساعة

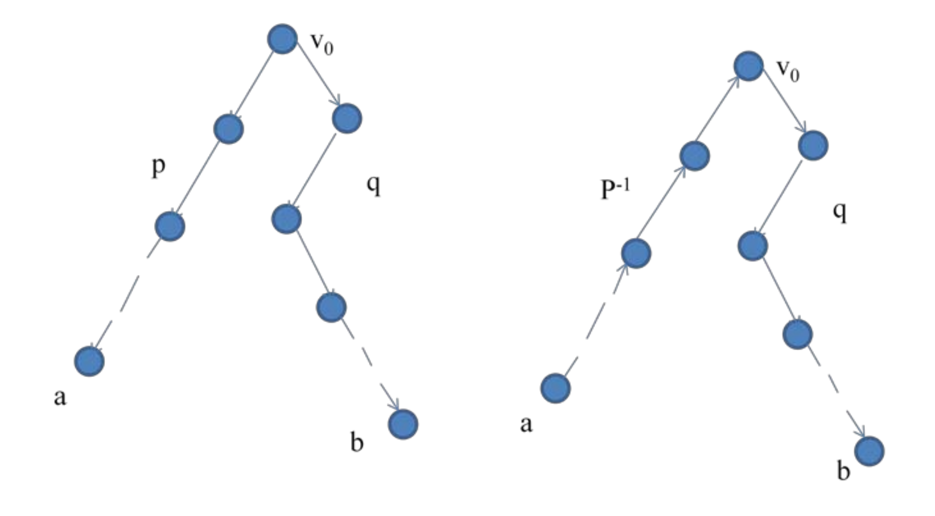


أو أن كل النقاط عكس عقارب الساعة أو بعض الأزواج عكس عقارب الساعة وهذا مستحيل كما في الشكل



أو أن الشجرة كل عقدة فيها تمتلك درجة واحدة داخلة إليها

كما أن أول حالتين تعني أن T تحوي دائرة وهذا غير ممكن وهكذا وجود الدائرة p في R يؤدي إلى تناقض
لنثبت أن R مترابطة
لتكن جذر للشجرة T عندئذ :
إذا كانت a ,b عقدتين في A فيوجد طريق P من v_0 إلى a
و طريق q من v_0 إلى b



بالتالي كل الطرق في T قابل للعكس في R

← الطريق $q \circ p^{-1}$ مترابط حيث a ,b في R

عندما p^{-1} مقلوب الطريق p

← R مترابط

→ العكس يبرهن

مبرهنة -2-

لتكن R علاقة تناظرية على المجموعة A عندئذ R شجرة غير موجهة إذا وفقط إذا إحدى القضيتين محققة:

1 – R غير دائرية وإذا أضفنا أي ضلع غير موجه إلى R ← R لن تكون غير دائرية

2 – R مترابطة وإذا حذفنا إي ضلع غير موجه من R ← أصبحت العلاقة R غير مترابطة

مبرهنة -3-

الشجرة ذات n عقدة تمتلك n-1 ضلع

البرهان

الشجرة مترابطة عندئذ يجب على الأقل n-1 ضلع مرتبط ب n عقدة

نفرض أن هناك على الأكثر n-1 ضلع عندئذ :

إما الجذر يمتلك درجة واحدة داخلة أو أن بعض العقد تمتلك على الأقل درجتين داخلتين للعقدة من المبرهنة الأولى في بداية الفصل

← هذا مستحيل

← هناك n-1 ضلع

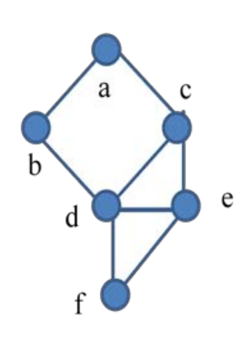
الشجرة المشدود على البيان spanning tree

تعريف-1-

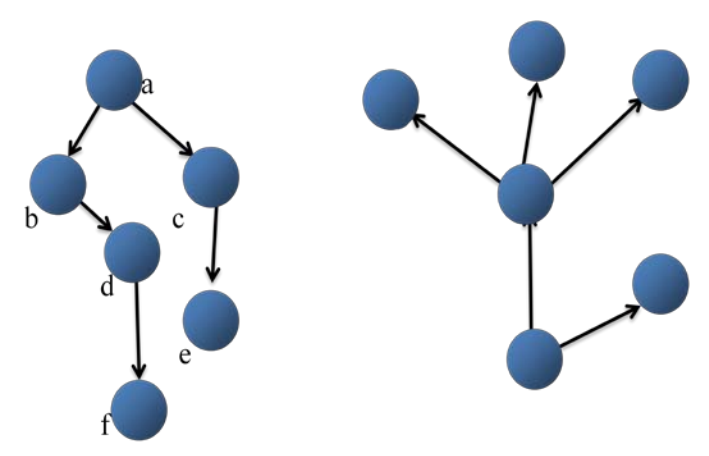
إذا كانت R تناظرية ومترابطة على A نقول عن الشجرة T على A أنها شجرة مشدودة على البيان من أجل العلاقة R إذا كانت الشجرة T لها نفس عقد R والتي يمكن أن نحصل عليها بحذف بعض الأضلاع من R

مثال -1-

لتكن R علاقة تناظرية وفق البيان



أن الشجرة المشدودة على البيان هي



كما أن الشجرة المشدودة على البيان ليست وحيدة

أن الشجرة المشدودة على البيان غير موجهة من أجل علاقة تناظرية مترابطة R لها بعض التطبيقات



ملاحظات

1- إذا كانت R علاقة معقدة مما يعني أنها تناظرية و مترابطة فإنه من الصعب رسم مخطط البحث R ,أي للمرور على كل العقد من رؤوسها مرة واحدة بأسلوب منظم.

2- إذا قصرنا R على شجرة مشدودة على البيان فإنه يمكن استخدام خوارزمية البحث التي مرت معنا في الفقرة السابقة .

3- إن النظرية (2) تعطينا خوارزمية لإيجاد الشجرة المشدودة على البيان غير الموجهة لعلاقة R وهي :نقوم بحذف جميع الأضلاع غير الموجهة من R حتى نصل إلى مرحلة يكون فيها حذف أي ضلع غير موجه آخر يؤدي إلى علاقة غير مترابطة عندئذ سوف نحصل بالنتيجة على شجرة مشدودة على البيان غير موجهة .

مثال -2-

إن هذا المثال يعرض نتيجة الحذف المتتالي للأضلاع غير الموجهة حيث ينتهي في (f) و هي الشجرة المشدودة على البيان غير الموجهة لاحظ الشكل التالي

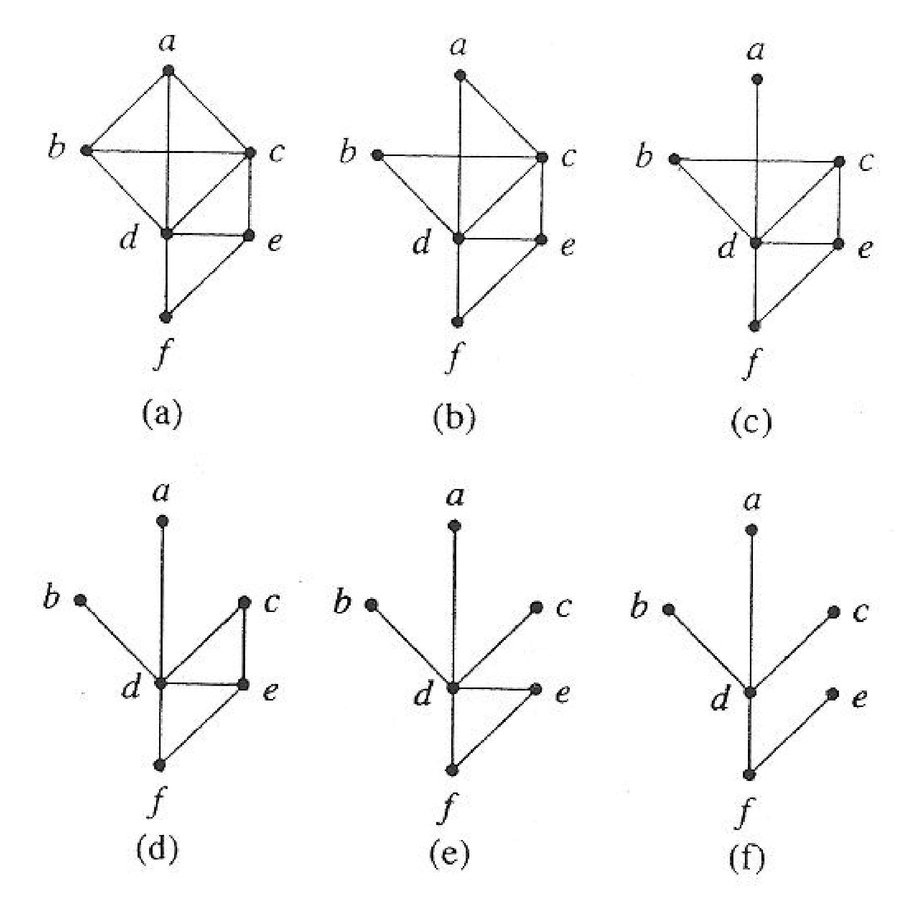


Figure 7.32

ملاحظة

لقد تم إيجاد هذه الخوارزمية من أجل العلاقات الصغيرة والتي مخططاتها سهلة الرسم .
وأما من أجل العلاقات الكبيرة فإنها غير مجدية إذ أنه في كل مرحلة يجب علينا تفحص الترابط , وهذه العملية تتطلب خوارزمية معقدة .
من أجل ذلك سنعرض طريقة فعالة تعطيننا أيضاً شجرة مشدودة على البيان بدلاً من شجرة مشدودة على البيان غير موجهة .

• لتكن R علاقة على A وليكن $a , b \in A$ و لتكن $A_0=A-\{a , b\}$ و
$A' = A_0 \cup \{a'\}$ حيث a' عنصر جديد لا ينتمي إلى A
سنعرف العلاقة R' كما يلي :
لنفرض $u , v \in A'$ حيث : $u \neq a'$ & $v \neq a'$

$(a' , u) \in R'$ إذا وفقط إذا $(b , u) \in R$ OR $(a , u) \in R$

$(u , a') \in R'$ إذا وفقط إذا $(u , b) \in R$ OR $(u , a) \in R$

$(u , v) \in R'$ إذا وفقط إذا $(u , v) \in R$

وعندئذ نقول إن R' هي نتيجة اتحاد العقدتين a و b

مثال -3-

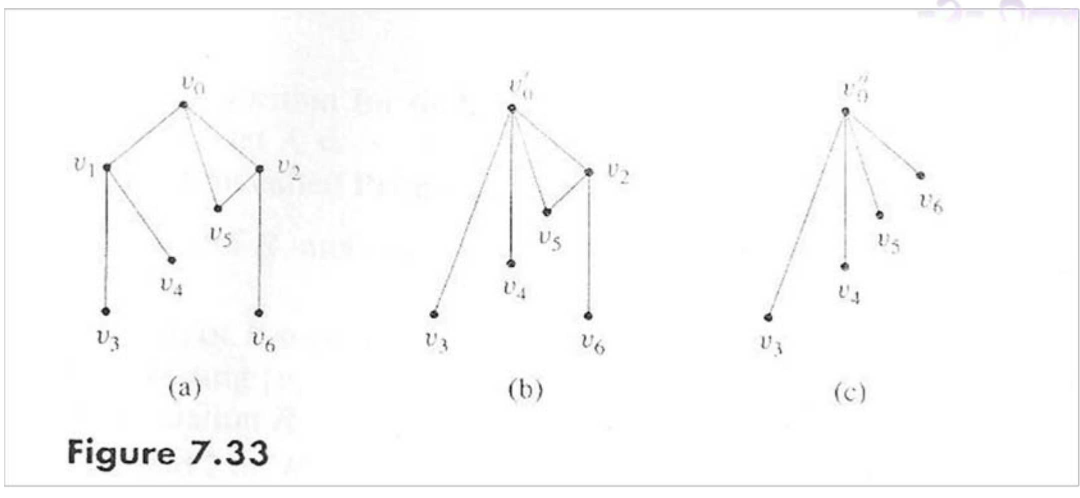


Figure 7.33

1 - إن الشكل (a) يمثل مخطط لعلاقة تناظرية .
2 - إن الشكل (b) يمثل نتيجة دمج العقدتين v_0 و v_1 في عقدة واحدة v'_0 .
3 - إن الشكل (c) يبين نتيجة دمج العقدتين v'_0 و v_2 من العلاقة التي مخططها (c) في عقدة جديدة v''_0 .
4 – نلاحظ أيضا في الشكل (c) أن الأضلاع غير الموجهة التي كانت سابقاً بين v'_0 و v_5 وبين v_2 و v_5 تم دمجها في ضلع واحد غير موجه

الشكل الجبري للدمج

إذا كانت R علاقة على A فإننا سندعو مؤقتاً عناصر المجموعة A بعقد R
لنفرض الآن العقدتين a و b من العلاقة R تم دمجهما في عقدة جديدة a' التي توضع بدلاً من a و b لتشكيل العلاقة R' , حتى نشكل مصفوفة R' نتبع الخطوات التالية :
1 - نجعل السطر i يمثل العقدة a , والسطر j يمثل العقدة b , ثم نستبدل السطر i باتحاد بين السطرين i و j بالارتباط إما 1 أو 0
ويكون 1 في موقع ما عندما أحد القيم لديه 1 في هذا الموقع .
2 - نستبدل العمود i بأخذ باتحاد بين العمودين i و j .
3 - نعيد القطر الرئيسي إلى قيمه الأصلية في العلاقة R .
4 - نحذف السطر j والعمود j .

مثال -4-

إن المصفوفات الموافقة للعلاقات التناظرية المعطاة في الشكل السابق هي :

	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_0	0	1	1	0	0	1	0
v_1	1	0	0	1	1	0	0
v_2	1	0	0	0	0	1	1
v_3	0	1	0	0	0	0	0
v_4	0	1	0	0	0	0	0
v_5	1	0	1	0	0	0	0
v_6	0	0	1	0	0	0	0

(a)

	v_0'	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_0'	0	1	1	1	1	0
v_2	1	0	0	0	1	1
v_3	1	0	0	0	0	0
v_4	1	0	0	0	0	0
v_5	1	1	0	0	0	0
v_6	0	1	0	0	0	0

(b)

	v_0''	v_3	v_4	v_5	v_6
v_0''	0	1	1	1	1
v_3	1	0	0	0	0
v_4	1	0	0	0	0
v_5	1	0	0	0	0
v_6	1	0	0	0	0

(c)

في الشكل b قمنا بدمج العقد v_0 و v_1 في العقدة v_0' لاحظ أن هذا ينتج من خلال أخذ اندماج بين السطرين الأول والثاني في المصفوفة (a) ووضع الناتج كسطر أول في المصفوفة (b) .ونفعل نفس العملية من أجل الأعمدة ثم نستعيد القطر و نحذف السطر الثاني والعمود الثاني .إذا كانت العقد v_0' و v_2 في المخطط والذي مصفوفتها هي المصفوفة (b) قد تم دمجهما فإن المخطط الناتج سيكون له المصفوفة (c) .

prim's algorithm

سنعطي الآن خوارزمية لإيجاد الشجرة المشدودة على البيان لعلاقة تناظرية مترابطة R على مجموعة $A=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$, إن الطريقة مكافئة لشكل خاص من الخوارزميات تدعى **prim's algorithm** ولها الخطوات التالية :

1- نختار عقدة v_1 من R بحيث يكون السطر الأول هو الموافق للعقدة v_1 بالمصفوفة

2- نختار عقدة v_2 من R بحيث $(v_1,v_2)\in R$, وندمج v_1 و v_2 في عقدة جديدة v_1' تمثل $\{v_1, v_2\}$ ونستبدل v_1' ب v_1 . ثم نقوم بحساب المصفوفة للعلاقة الناتجة R' . من الرسم البياني نسمي v_1' **بالعقدة المركبة**.

3- نكرر الخطوتين السابقتين على R' وعلى جميع العلاقات حتى نحصل على علاقة لها عقدة واحدة , وفي كل مرحلة نحتفظ بنسخة من مجموعة العقد الأصلية الممثلة بكل عقدة مركبة .

4 - أنشئ الشجرة المشدودة على البيان كما يلي : في كل مرحلة عند دمج العقد a و b نحدد ضلع في R من أحد العقد الأساسية الممثلة ب a إلى أحد العقد الأساسية الممثلة ب b .

ملاحظة

نطلق أحيانا على الشجرة المشدودة على البيان باسم شجرة السقالة أو الشجرة المولدة

مثال -5-

سنطبق خوارزمية الأعداد الأولية على العلاقة التناظرية التي لها المخطط التالي :

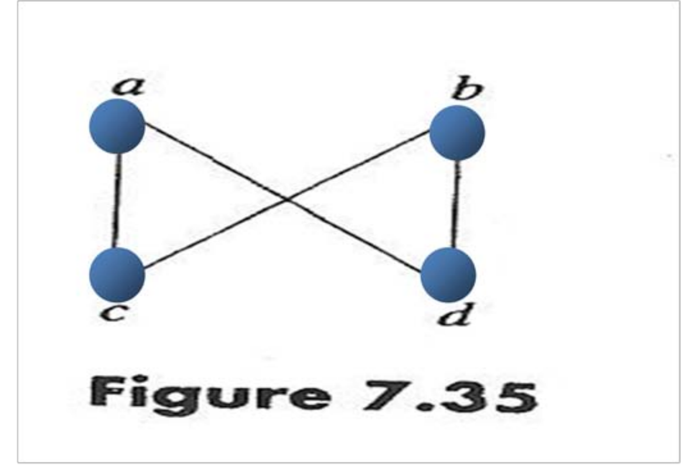


Figure 7.35

في الجدول الآتي نعرض المصفوفات المطبقة عندما تكون المجموعة الأصلية من العقد تتناقص بالدمج للحصول على عقدة واحدة , وفي كل خطوة نراقب مجموعة العقد الأصلية الممثلة بكل عقدة مدموجة بالإضافة إلى العقدة الجديدة

الرأس الجديد الذي سيدمج (مع الرأس الأول)	الرؤوس الأصلية الممثلة بالرؤوس المدموجة	المصفوفة
c	-	
b	$a' \leftrightarrow \{a,c\}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	a″ ↔ { a,c,b }	d
[0]	a‴↔ {a,c,d,b}	-

شجرة السقالة الأصغرية

تعريف -1-

البيان الموزون:هو بيان زودت أضلاعه بوزن (قيمة ما)

ملاحظة:

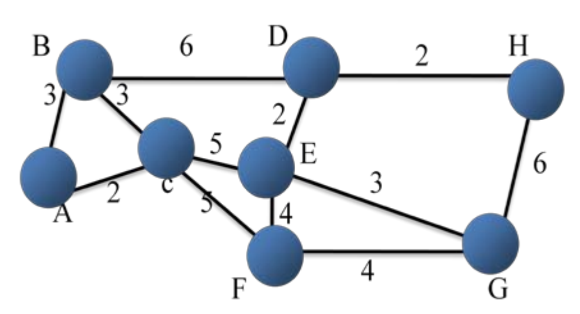
1- الوزن لضلع (v_i, v_j) أحيانا يشير إلى المسافة بين العقدتين v_i و v_j حيث المسافة بين العقدتين v, u مثلا كما يلي : العقدة u هي أقرب عقدة مجاورة لـ v إذا كانت u,v متجاورتين ولا يوجد عقدة أخرى ترتبط بِ v بضلع يملك وزن أقل من وزن (u, v)

2- من الممكن لـ v أن يملك أكثر من عقدة مجاورة بنفس المسافة

3- العقدة v هي العقدة المجاورة الأقرب لمجموعة العقد في بيان ما $V= \{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ إذا كانت العقدة v مجاورة لعنصر ما v_i من V ولا يوجد أي عقد أخرى تجاور عنصر من V مرتبطة بضلع له وزن أقل من (v, v_i) و هذه العقدة v قد تنتمي لـ V

مثال -1-

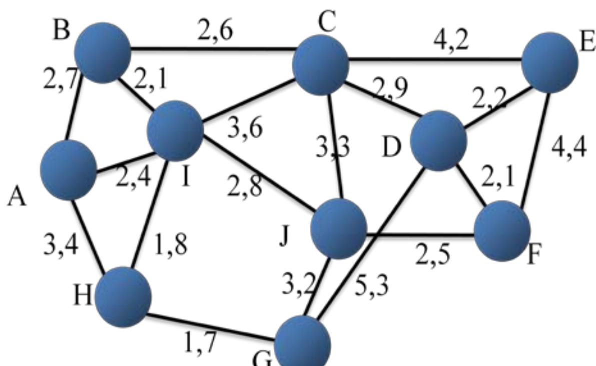
لتكن لدينا دائرة صيانة في بلدة صغيرة ترعى نظام ممرات المشاة بين مناطق الاستجمام في هذه البلدة عندئذ البيان الموزون لهذا النظام حيث أن الأوزان تمثل المسافات بالكيلومترات



في البيان العقدة C هي العقدة المجاورة الأقرب للعقدة A وكما أن E و G كلاهما عقد مجاورة الأقرب للعقدة F

مثال -2-

شركة اتصالات تتحرى كلف تحسين الروابط بين محطات النقل التي تملكها عندئذ البيان الموزون لها يكون



ويكون عندئذ العقدة D هي العقدة المجاورة الأقرب لمجموعة العقد V={C, E, J} لأن الضلع (D ,E) يملك الوزن 2,2 ولا يوجد عقدة أخرى تجاور مجموعة العقد ومرتبطة بضلع مع أحدى هذه العقد ووزنه أقل من 2,2

ملاحظة

من تطبيقات البيانات الموزونة نجد أنه من الضروري إيجاد شجرة مشدودة على بيان غير موجه بحيث مجموع أوزان أضلاعه أصغر ما يمكن مثل هذه الشجرة ندعوها شجرة السقالة الأصغرية

خوارزمية prim

لتكن R علاقة تناظرية مترابطة ذات n عقدة :

الخطوة الأولى :نأخذ عقدة من مجموعة العقد V

الخطوة الثانية : نختار ضلع من مجموعة الأضلاع الخارجة من العقدة المختارة في الخطوة السابقة بحيث يكون وزنه أصغريا

الخطوة الثالثة : نكرر الخطوة الثانية حتى يصبح |E|=n-1

في نص خوارزمية Prim بدأنا بأي عقدة من R و أنشأنا الشجرة السقالة الأصغرية بإضافة ضلع إلى العقدة المجاورة الأقرب إلى مجموعة العقد المترابطة ونستمر طالما إضافة ضلع لا يكمل دائرة

مبرهنة -1-

إن خوارزمية prim تعطي الشجرة السقالة الأصغرية للعلاقة R

البرهان :

لتكن R تملك n عقدة ولتكن T هي الشجرة السقالة الموافقة لـ R والناتجة من تطبيق خوارزمية prim

بفرض أن الأضلاع لـ T في الترتيب الذي اختيرت فيه هي $t_1,t_2,\ldots,t_{n-1}$

لأجل كل i من 1 إلى n-1 ونعرف T_i بأنها الشجرة التي أضلاعها $t_1,t_2,\ldots,t_i$ و $T_0=\{\ \}$

عندئذ $T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \ldots \subset T_{n-1} = T$ وسنبرهن بالاستقراء الرياضي بأن كل T_i ستكون محتواة في شجرة السقالة الأصغرية الموافقة لـ R

وضوحا $T_0=\{\ \}$: p(0) : محتواة في كل شجرة سقالة أصغرية موافقة لـ R

لنفرض الآن أن p(k) :T_k محتواة في شجرة سقالة أصغرية $T^\backslash$ لـ R وسنستخدم p(k)

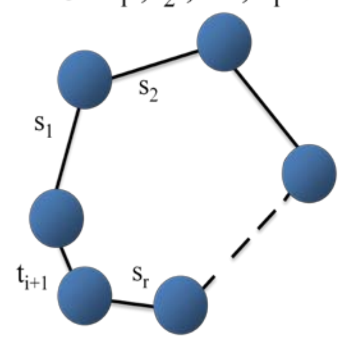
لإثبات p(k+1) : T_{k+1} محتواة في شجرة سقالة أصغرية

من التعريف لدينا $\{t_1,\ldots\ldots, t_k\} \subseteq T^\backslash$ فإذا كانت $t_{k+1} \in T^\backslash$ عندها $T_{k+1} \subseteq T^\backslash$

ومنه p(k+1) محققة ويتم المطلوب

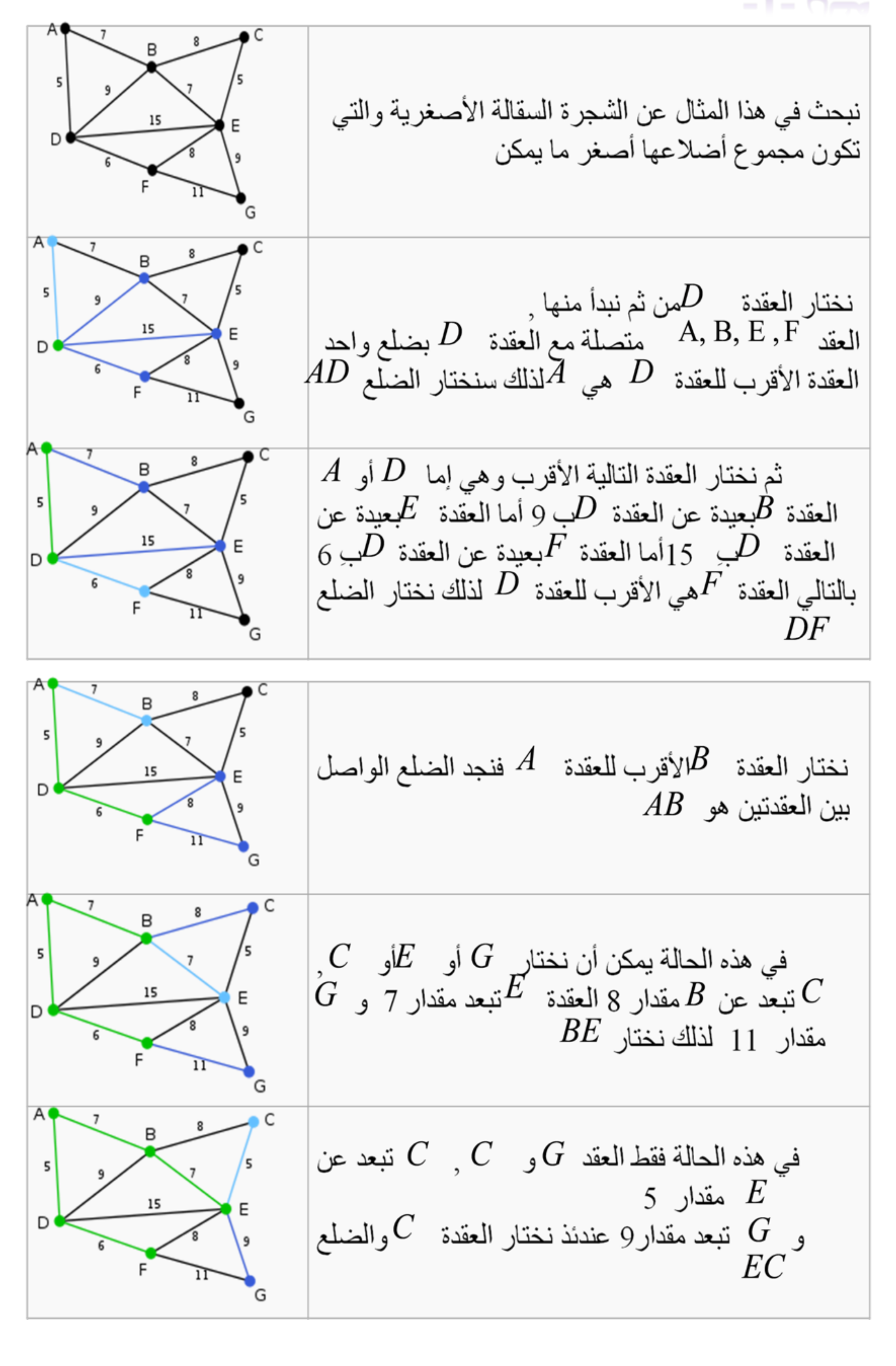
وإذا كانت t_{k+1} لا تنتمي لـ $T^\backslash$ عندها $T^\backslash \cup \{t_{k+1}\}$ يحوي دائرة (لأن $T^\backslash$ شجرة سقالة أصغرية وإضافة أي وتر لها (الوتر:هو ضلع من البيان وليس من الشجرة السقالة الأصغرية) سوف نحصل على دائرة في البيان)

وهذه الدائرة أضلاعها $s_1, s_2, \ldots, s_r$ من $T^\backslash$

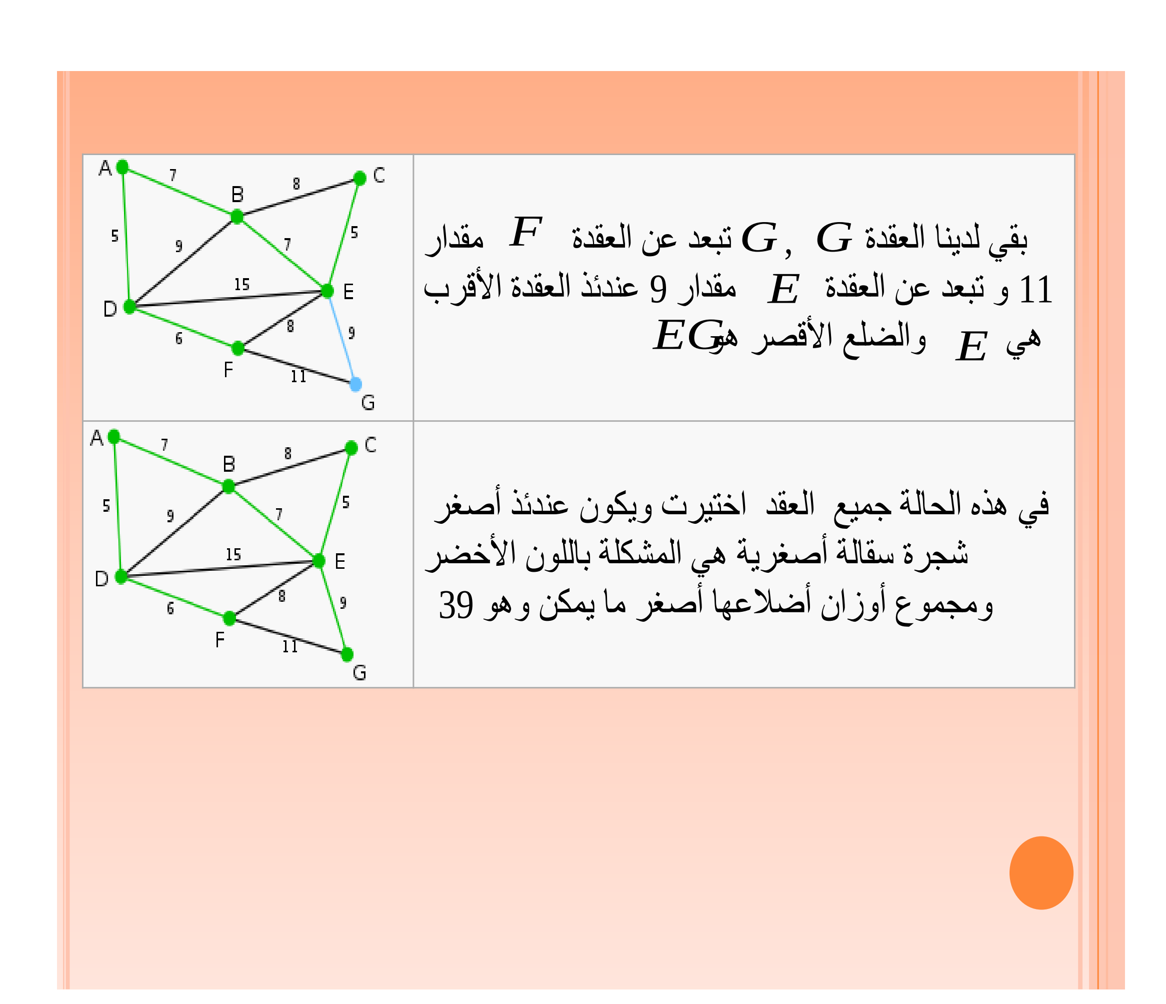


إن أضلاع هذه الدائرة لا يمكن أن تكون جميعها من T_k أو T_{k+1} سيحوي هذه الدائرة وليكن s_1 هو الضلع ذو الدليل الأصغر 1 وبحيث أن s_2 ليس من T_k عندئذ الضلع s_1 يملك عقدة واحدة في الشجرة T_k وواحدة ليست في T_k وهذا يعني أنه عندما T_{k+1} تم اختيارها عن طريق خوارزمية prim و s_1 كان أيضا موجود لذا الوزن لـ s_1 أكبر أو يساوي وزن T_{k+1} إن الشجرة السقالة $(T^\backslash - \{s_1\}) \cup \{t_{k+1}\}$ تحوي T_{k+1} الوزن لهذه الشجرة أقل أو يساوي وزن $T^\backslash$ إذا هي الشجرة السقالة الأصغرية لـ R وبالتالي p(k+1) محققة إذا $T_{n-1}= T$ محتواة في الشجرة السقالة الأصغرية وهي يجب أن تكون شجرة السقالة الأصغرية

مثال -1-

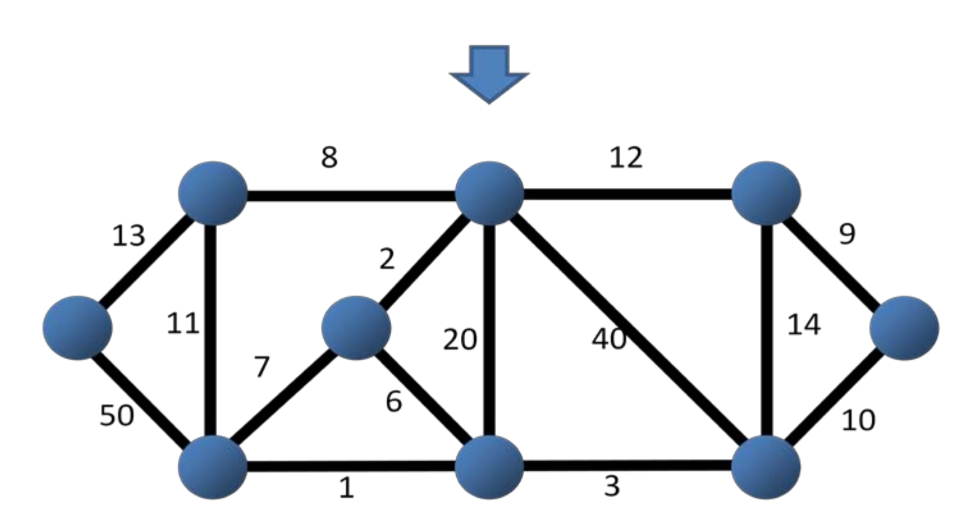


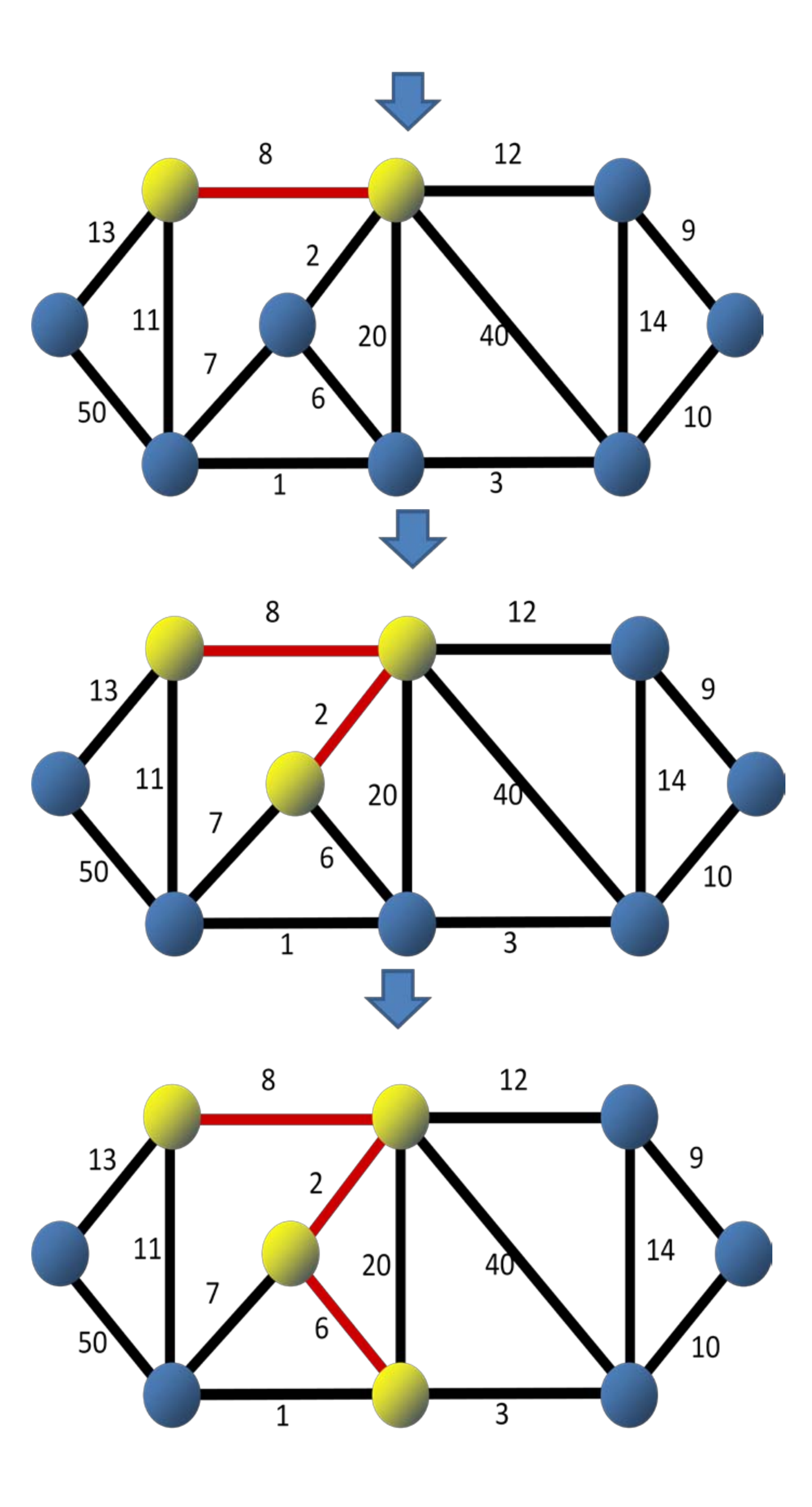
نبحث في هذا المثال عن الشجرة السقالة الأصغرية والتي تكون مجموع أضلاعها أصغر ما يمكن	
نختار العقدة D من ثم نبدأ منها , العقد A, B, E , F متصلة مع العقدة D بضلع واحد العقدة الأقرب للعقدة D هي A لذلك سنختار الضلع AD	
ثم نختار العقدة التالية الأقرب وهي إما D أو A العقدة B بعيدة عن العقدة D ب 9 أما العقدة E بعيدة عن العقدة D بِ 15 أما العقدة F بعيدة عن العقدة D بِ 6 بالتالي العقدة F هي الأقرب للعقدة D لذلك نختار الضلع DF	
نختار العقدة B الأقرب للعقدة A فنجد الضلع الواصل بين العقدتين هو AB	
في هذه الحالة يمكن أن نختار G أو E أو C, C تبعد عن B مقدار 8 العقدة E تبعد مقدار 7 و G مقدار 11 لذلك نختار BE	
في هذه الحالة فقط العقد G و C , C تبعد عن E مقدار 5 و G تبعد مقدار 9 عندئذ نختار العقدة C والضلع EC	



	بقي لدينا العقدة G , G تبعد عن العقدة F مقدار 11 و تبعد عن العقدة E مقدار 9 عندئذ العقدة الأقرب هي E والضلع الأقصر هو EG
	في هذه الحالة جميع العقد اختيرت ويكون عندئذ أصغر شجرة سقالة أصغرية هي المشكلة باللون الأخضر ومجموع أوزان أضلاعها أصغر ما يمكن وهو 39

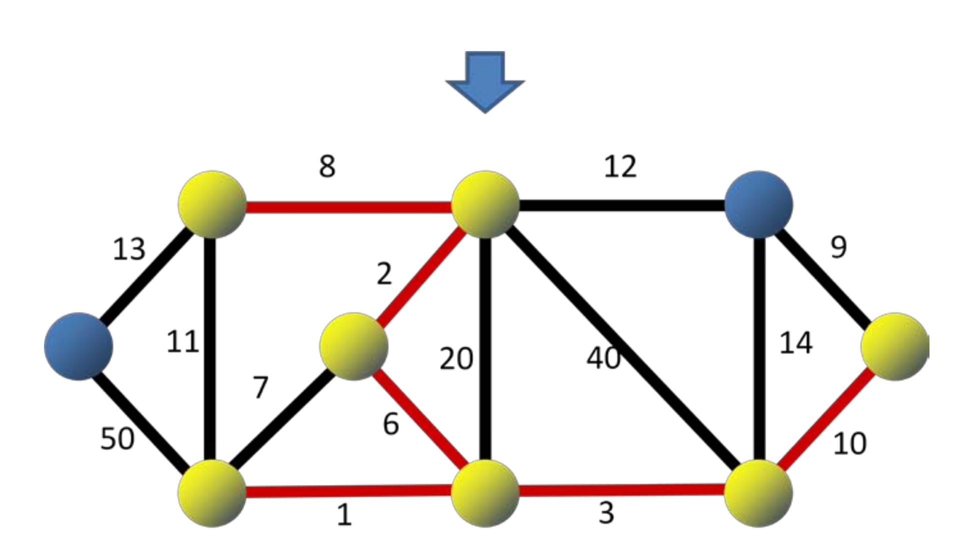
مثال -2-

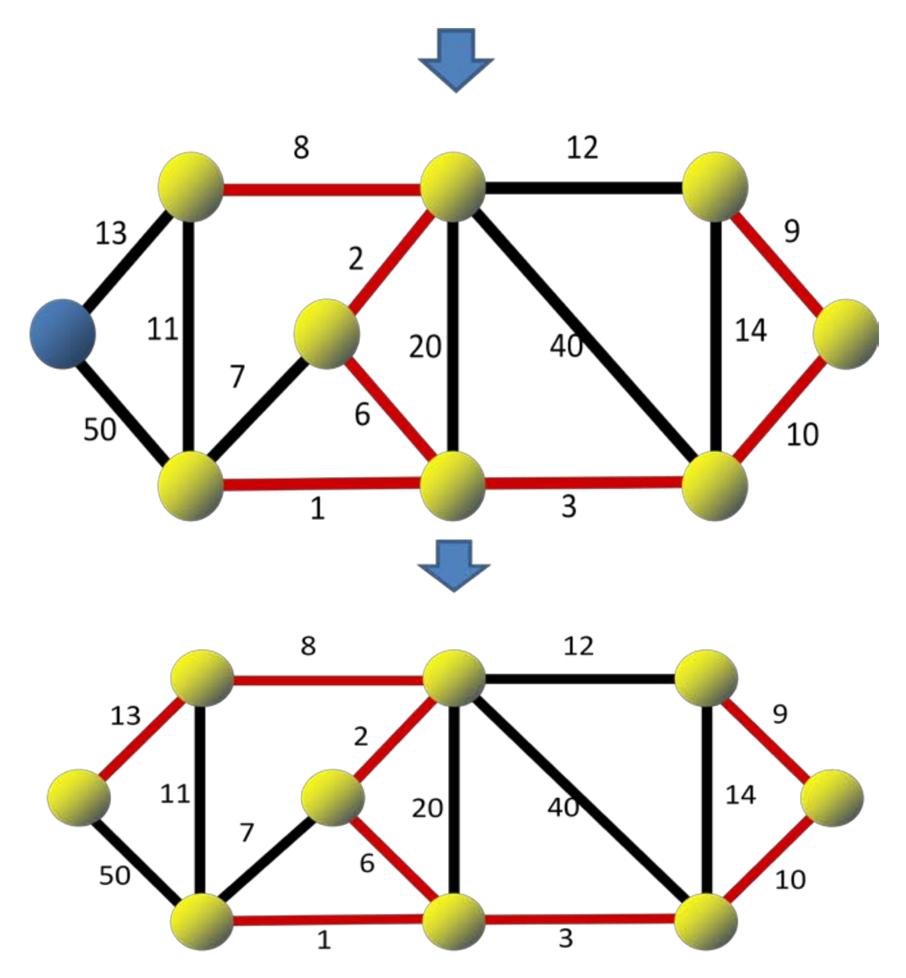



8
12
13
2
9
11
20
40
14
7
6
50
10
1
3
8
12
13
2
9
11
20
40
14
7
6
50
10
1
3
8
12
13
2
9
11
20
40
14
7
6
50
10
1
3

8 12
13 9
2
11 20 40 14
7
6
50 10
1 3

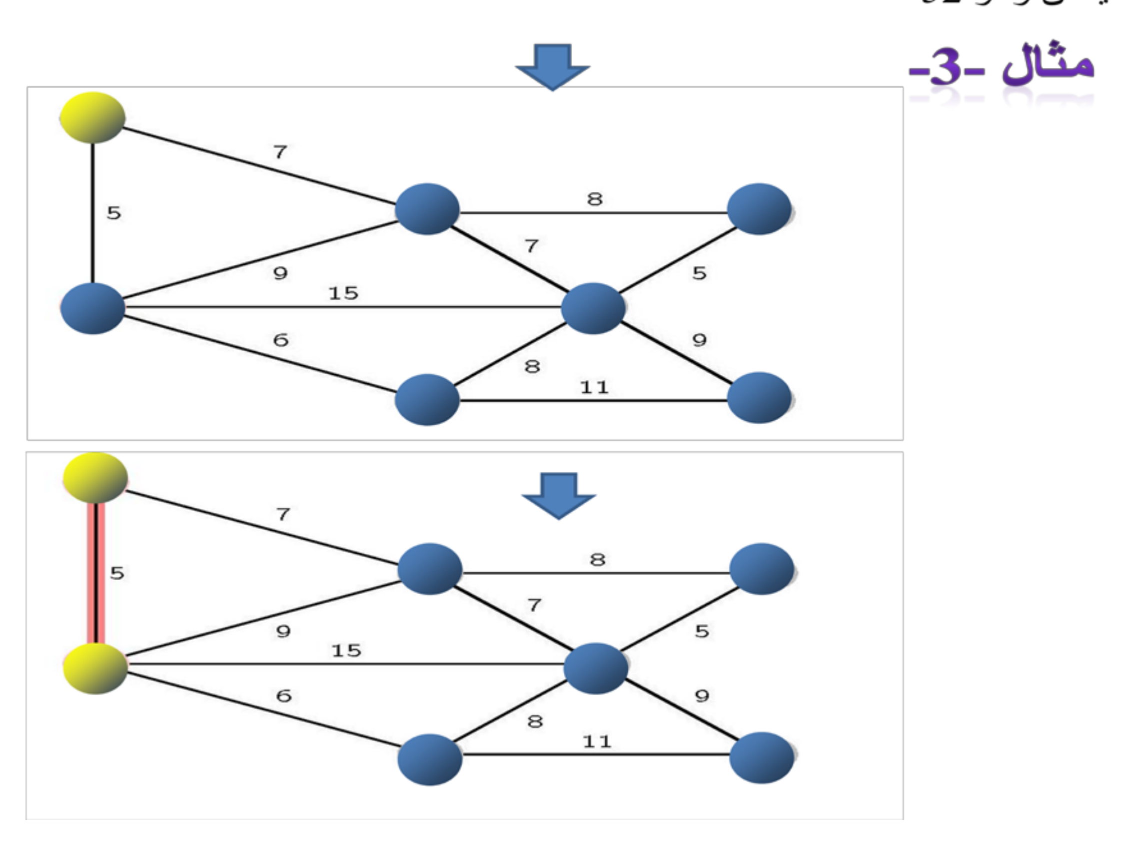
8 12
13 9
2
11 20 40 14
7
6
50 10
1 3

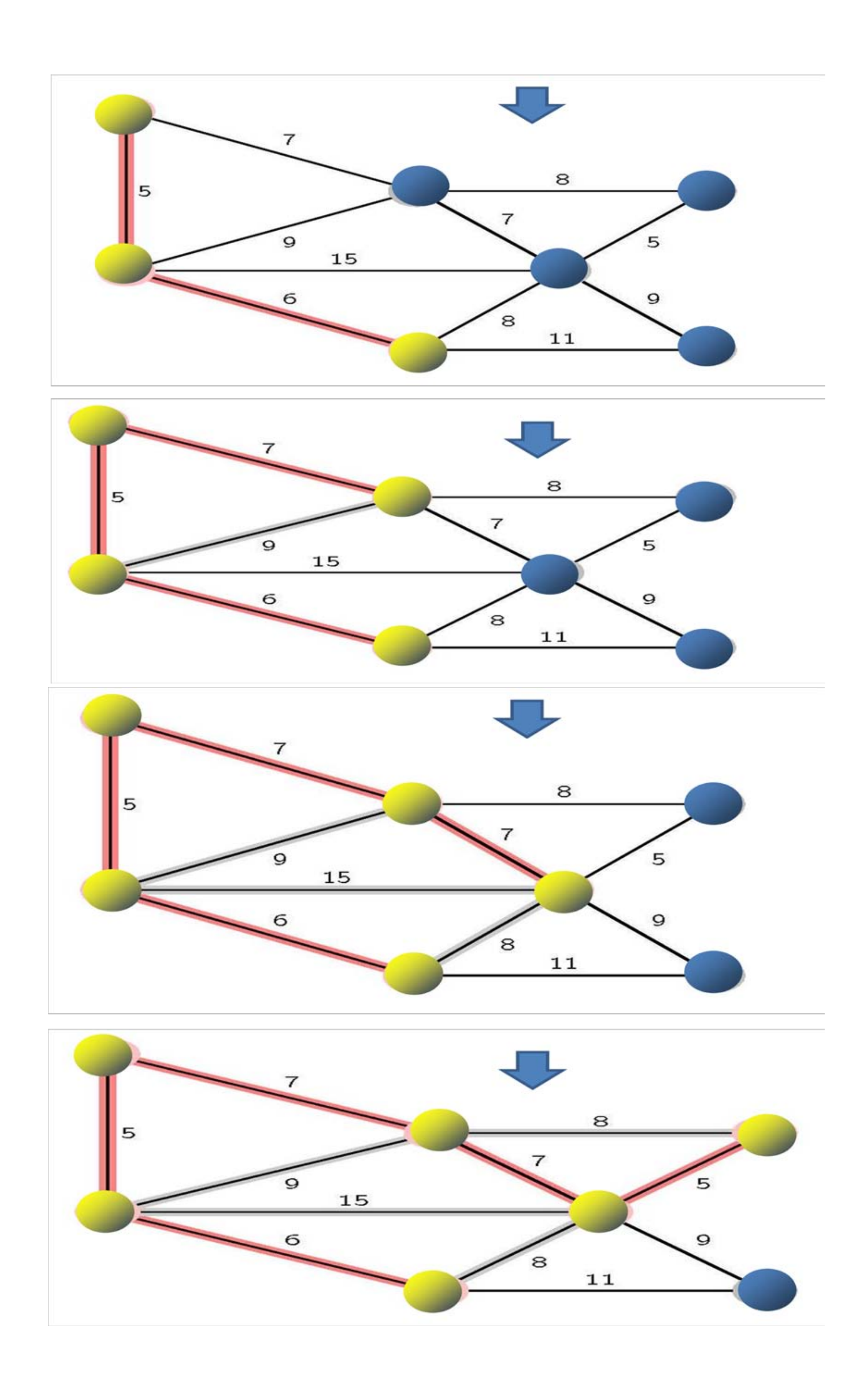


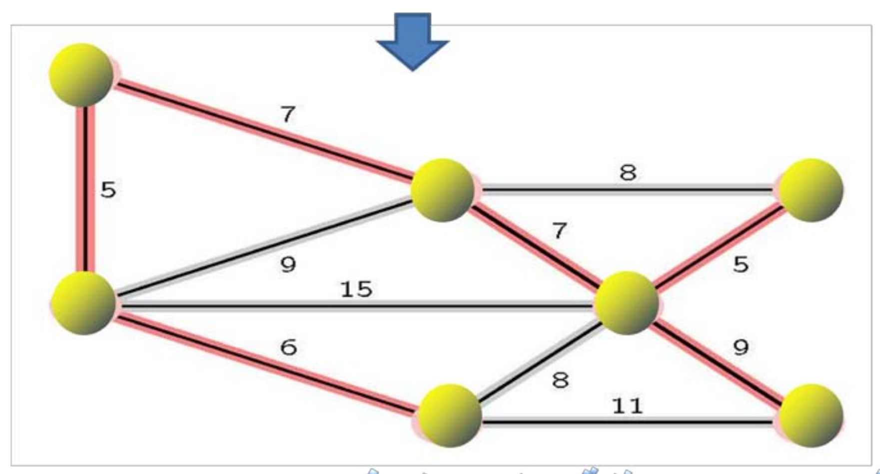


وبذلك تكون الشجرة السقالة الأصغرية هي باللون الأحمر ومجموع أوزان أضلاعها أقل ما يمكن وهو 52

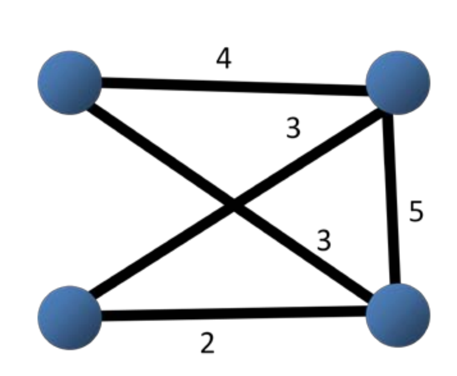
مثال -3-




7
5
8
7
9
15
5
6
9
8
11
7
5
8
7
9
15
5
6
9
8
11
7
5
8
7
9
15
5
6
9
8
11
7
5
8
7
9
15
5
6
9
8
11



خوارزمية prim ممثلة بالمصفوفات



	A	B	C	D
A	0	4	3	0
B	4	0	5	3
C	3	5	0	2
D	0	3	2	0

لتكن R علاقة تناظرية مترابطة بِ n عقدة , M هي مصفوفة الأوزان الموافقة لها

الخطوة الأولى : نختار العنصر الأصغر في M وليكن m_{ij} ولتكن a هي العقدة الممثلة بالصف i و b هي العقدة الممثلة بالعمود j

الخطوة الثانية : ندمج a و b كالتالي نستبدل السطر i بِ

$$m_{ik} = \begin{cases} m_{ik} & if \quad m_{jk} = 0 \\ m_{jk} & if \quad m_{ik} = 0 \\ \min(m_{ik}, m_{jk}) & if \quad m_{ik} \neq 0 \quad m_{jk} \neq 0 \\ 0 & if \; m_{ik} = m_{jk} = 0 \end{cases}$$

ونستبدل العمود i بِ

$$m_{ki} = \begin{cases} m_{ki} & if \quad m_{kj} = 0 \\ m_{kj} & if \quad m_{ki} = 0 \\ \min(m_{ki}, m_{kj}) & if \quad m_{ki} \neq 0 \quad m_{kj} \neq 0 \\ 0 & if \; m_{ki} = m_{kj} = 0 \end{cases}$$

نستبدل القطر الرئيسي بالعناصر الأصلية لِ M

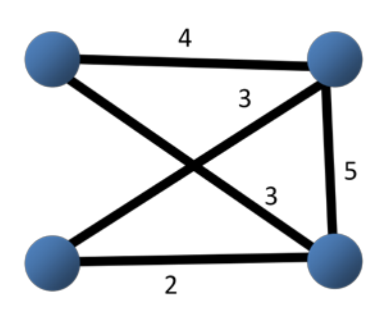
ثم نحذف السطر j والعمود j ونسمي المصفوفة الناتجة بِ $M^{\backslash}$

الخطوة الثالثة : نكرر الخطوتين السابقتين وعلى المصفوفات اللاحقة حتى نصل إلى عقدة واحدة وفي كل مرحلة نسجل مجموعة العقد الأصلية والممثلة بكل عقد الدمج

الخطوة الرابعة : ننشئ شجرة السقالة الأصغرية كالتالي : في كل مرحلة عندما ندمج العقدتين a و b نختار الضلع الممثل بالوزن الأصغري من واحدة من العقد الأصلية الممثلة ب a إلى واحدة من العقد الأصلية الممثلة بـ b

مثال -4-

ليكن لدينا البيان



عندئذ مصفوفة البيان هي

$$
\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

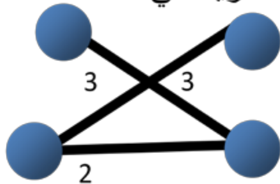
أن أصغر عنصر موجود في المصفوفة السابقة هو $m_{3,4}$ بالتالي ندمج c و D وهذا ينتج

$$
M' = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C' \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C' \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

مع $\{ C,D \} \leftrightarrow C'$ والضلع الأول يكون (C,D) نكرر الخطوات 1و2 على M' باستخدام $m_{1,3}=3$ وهذا يعطي

$$
M'' = \begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

مع $\{ A,C,D \} \leftrightarrow A'$ نختار الضلع (A,C) الدمج الأخير يثمر الضلع (B,D) وعندئذ تكون شجرة السقالة الأصغرية هي



ملاحظة :

إذا كانت R تملك نسبيا عدد صغير من الأضلاع عندئذ خوارزميات أخرى من الممكن أن تكون أكثر فعالية ومنها خوارزمية Kruskal
وهي مثال آخر عن خوارزمية Greedy التي تعطي حلولا جيدا

خوارزمية Kruskal

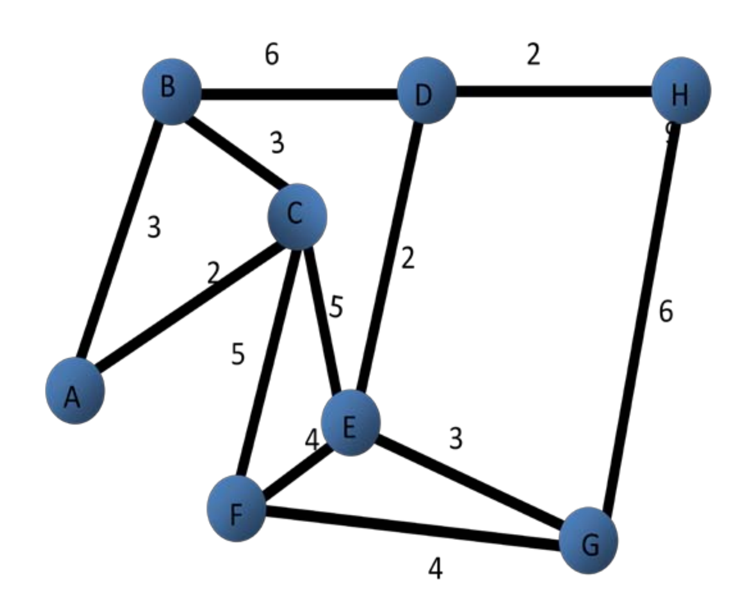
لتكن R علاقة تناظرية مترابطة بِ n عقدة ولتكن $S=\{ e_1 ,e_2 , ...,e_k\}$ مجموعة الأضلاع الموزونة وفق R عندئذ خوارزمية هي :
الخطوة الأولى : نختار الضلع e_1 من S بحيث يملك الوزن الأقل ونضع $E = \{ e_1\}$
ثم نستبدل S بِ $S-\{e_1\}$
الخطوة الثانية :نختار الضلع e_i من S ذي الوزن الأقل والذي لا يشكل دائرة مع عناصر E
ثم نستبدل E بِ $E \cup \{e_i\}$ و S بِ $S-\{e_i\}$
الخطوة الثالثة : نكرر الخطوة السابقة حتى نصل للضلع $|E| = n-1$

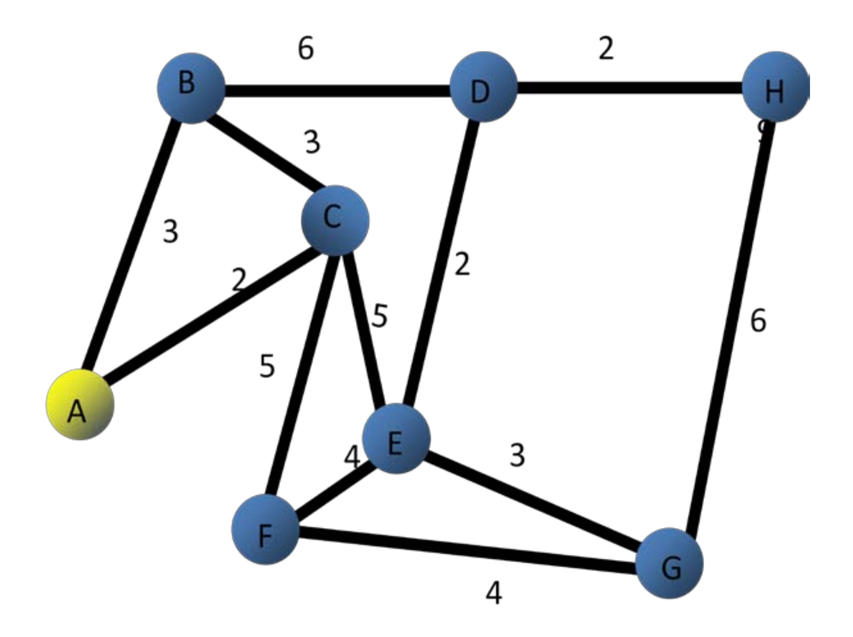
ملاحظة :

طالما R تملك n عقدة فإن n-1 ضلع في E ستشكل شجرة سقالة أصغرية وإن عملية الاختيار في الخطوة (2) كفيلة بأن هذه الشجرة هي شجرة سقالة أصغرية

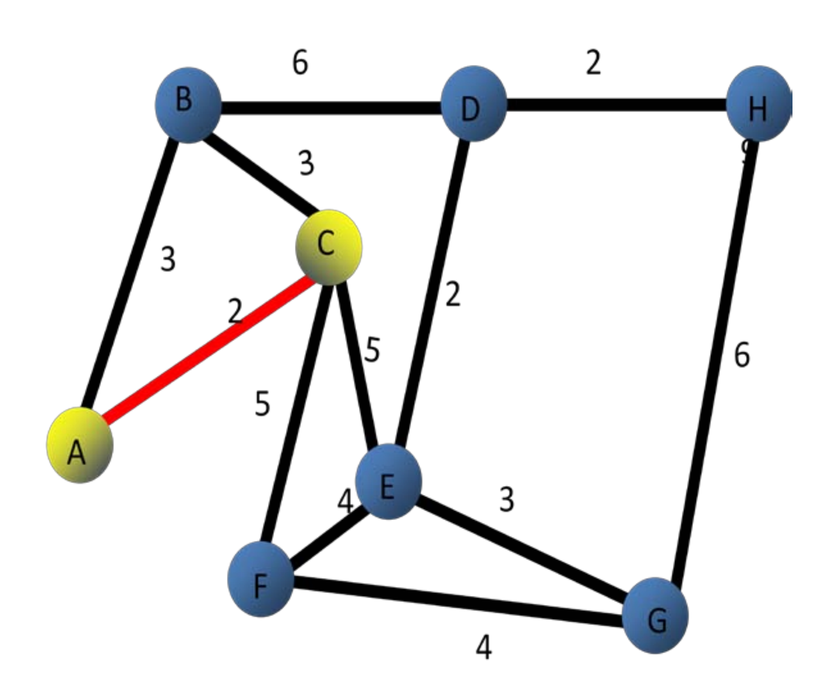
دائرة اجتماعية في بلدة قررت تعبيد بعض الممرات المشاة لجعلها ممرات للدراجات و كمرحلة أولى البلدة تريد أن تربط جميع مناطق الاستجمام بممرات الدراجات بكلفة رخيصة قدر الإمكان وبفرض أن كلفة الإنشاء هي نفسها في جميع أطراف النظام
استخدم خوارزمية prim وخوارزمية Kruskal لإيجاد خطة لتعبيد البلدة

خوارزمية prim

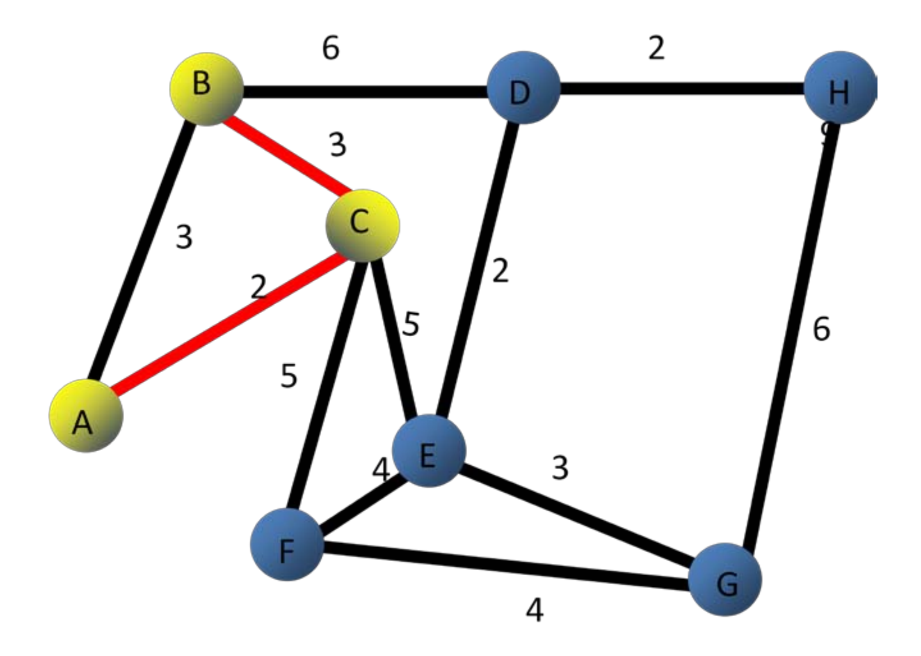




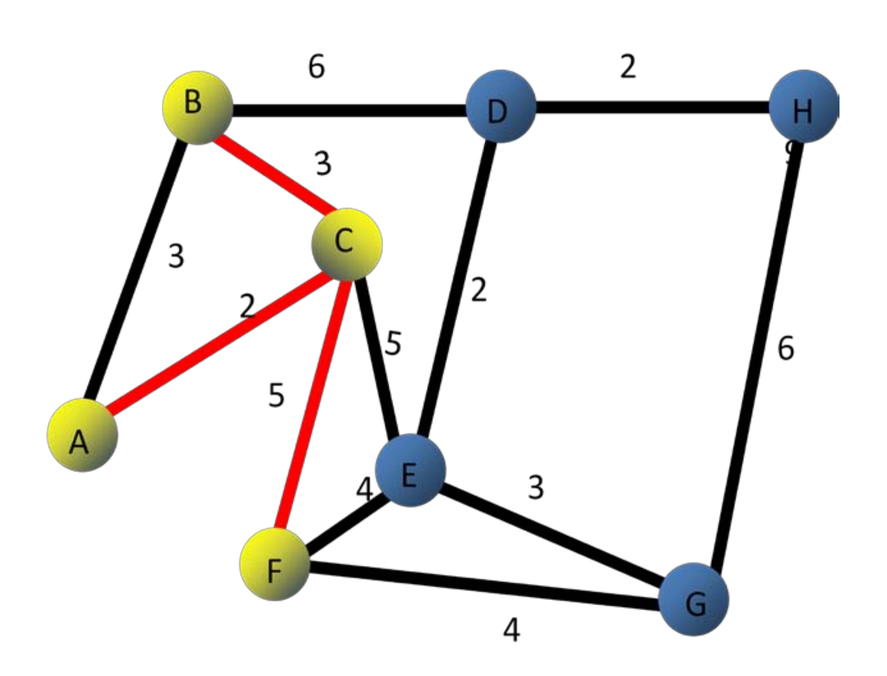
6
2
B
D
H
3
3
C
2
2
5
6
5
A
E
4
3
F
G
4



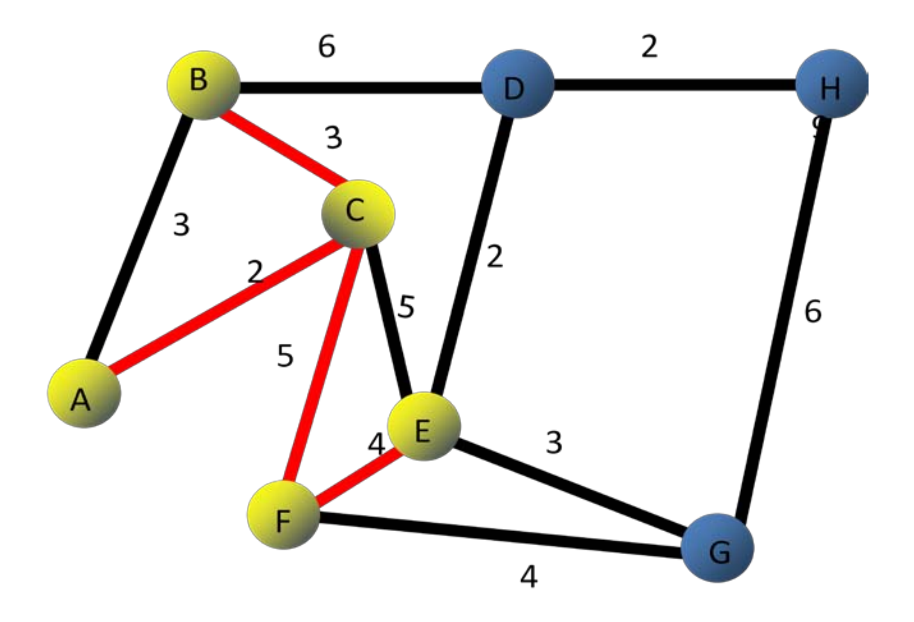
6
2
B
D
H
3
C
3
2
2
5
6
5
A
E
4
3
F
G
4



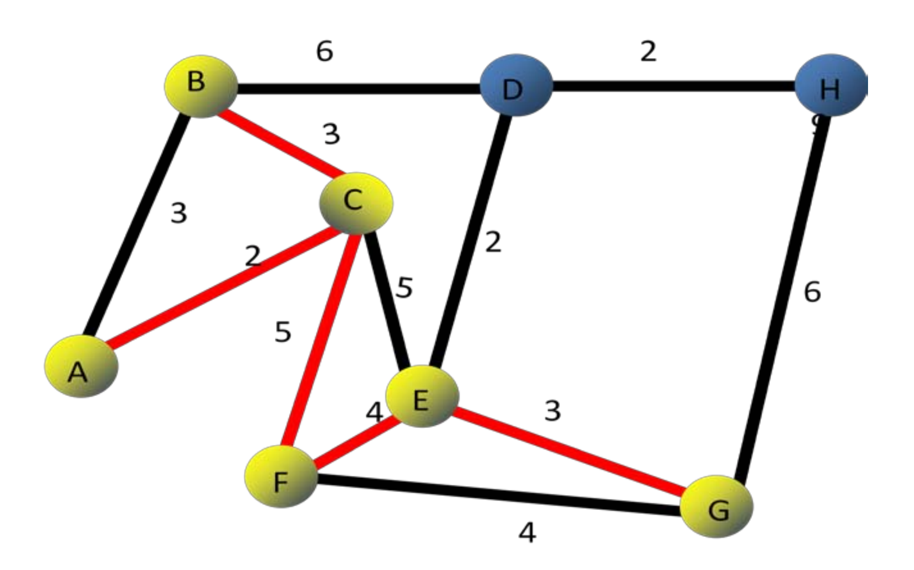
6
2
B
D
H
3
C
3
2
2
5
6
5
A
E
4
3
F
G
4



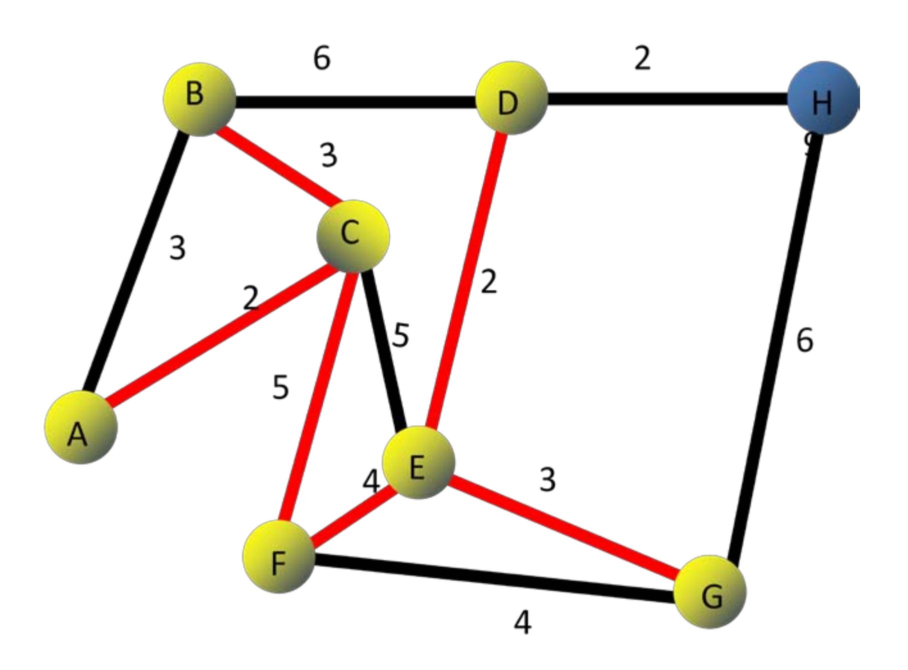
6
2
B
D
H
3
C
3
2
2
5
6
5
A
E
4
3
F
G
4



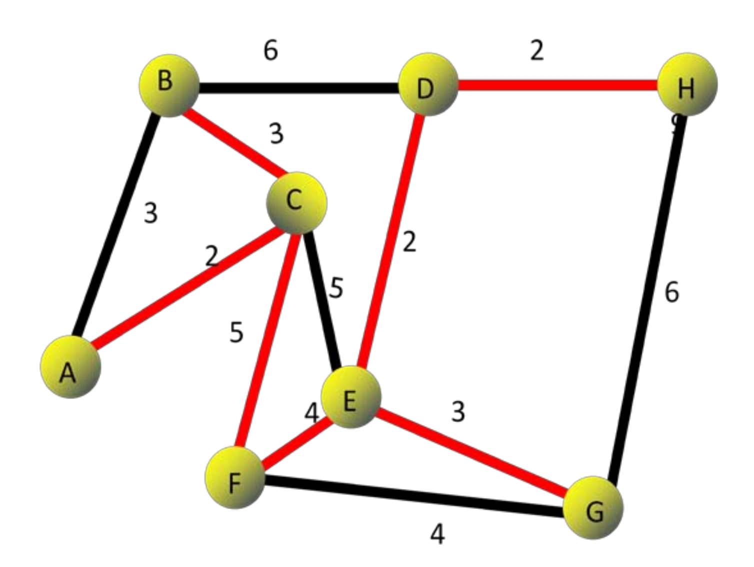
6
2
B
D
H
3
C
3
2
2
5
6
5
A
E
4
3
F
G
4



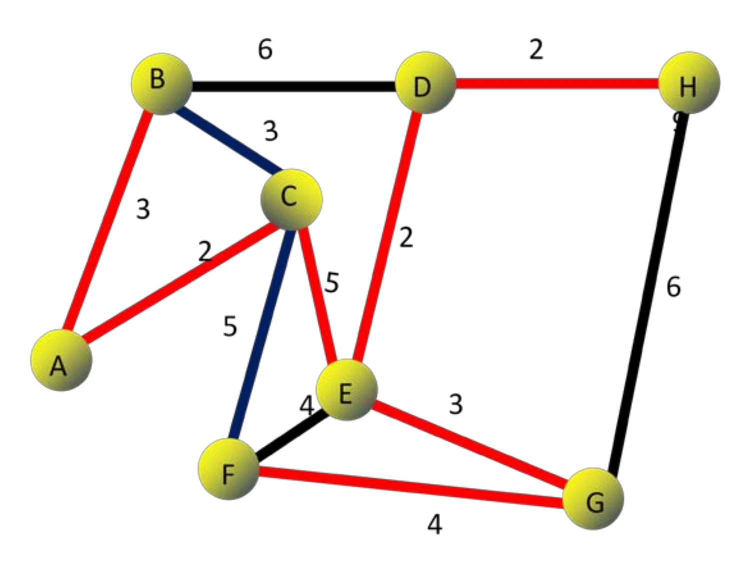
6
2
B
D
H
3
C
3
2
2
5
6
5
A
E
4
3
F
G
4



عندئذ تكون شجرة السقالة الأصغرية هي

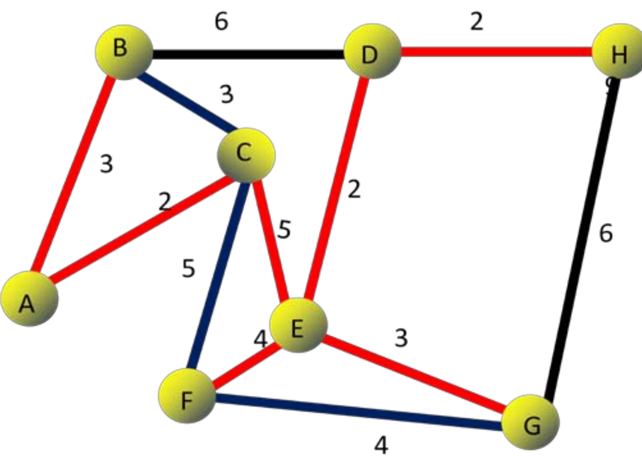


أيضا من الممكن أن تكون شجرة السقالة الأصغرية إذا أخذنا الضلع FG و أكملنا



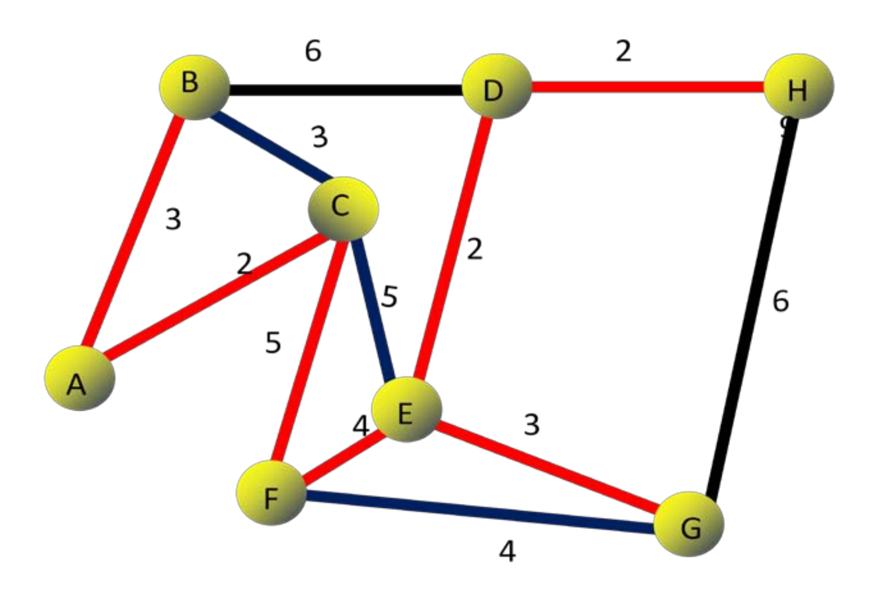
خوارزمية Kruskal

إن متتالية الأضلاع المختارة لهذا البيان هي (E, G) ,(D ,H), (D ,E) ,(A,B),(A,C) (E, F) ,(C ,E)

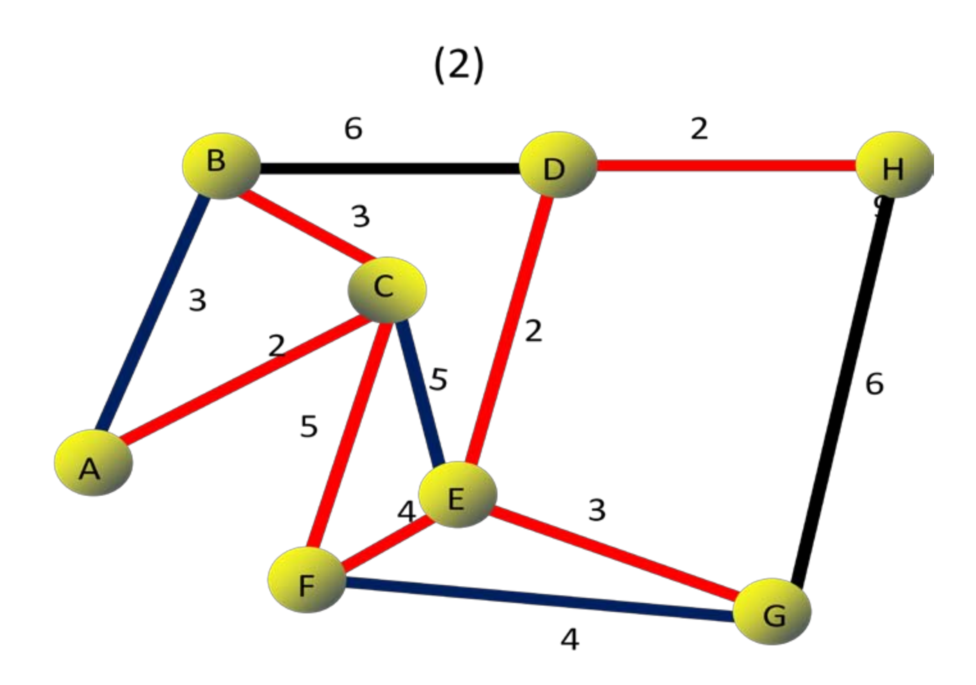


وعندئذ يكون مجموع أوزان أضلاعه 21 كيلو متر

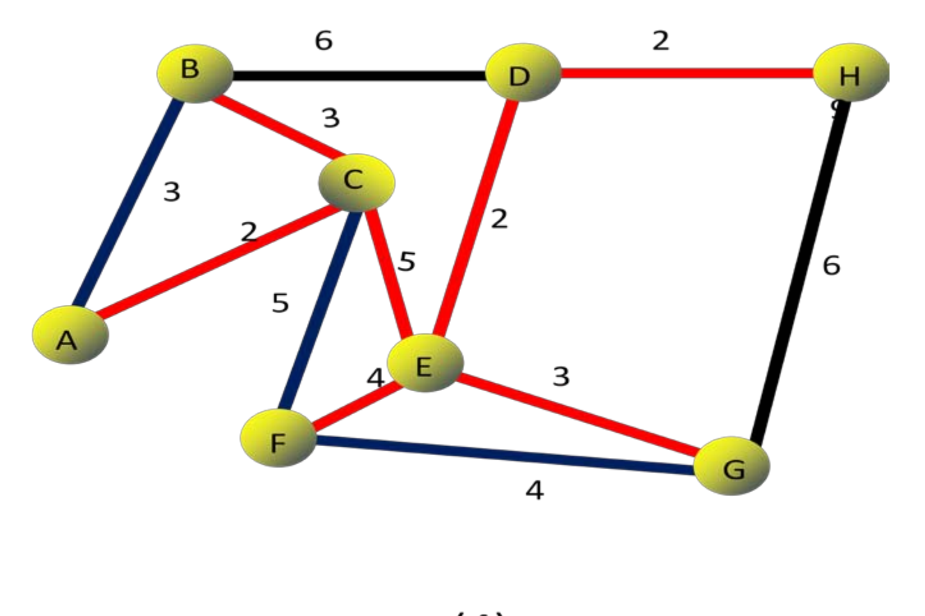
كما أنه يمكن اختيار الأضلاع لهذا البيان يكون



(2)



(3)



(4)

المراجع

Discrete Mathematics for New Technology Second Edition - Garnier , Taylor

Discrete Mathematics – Chen

Discrete Mathematics structure by combridge